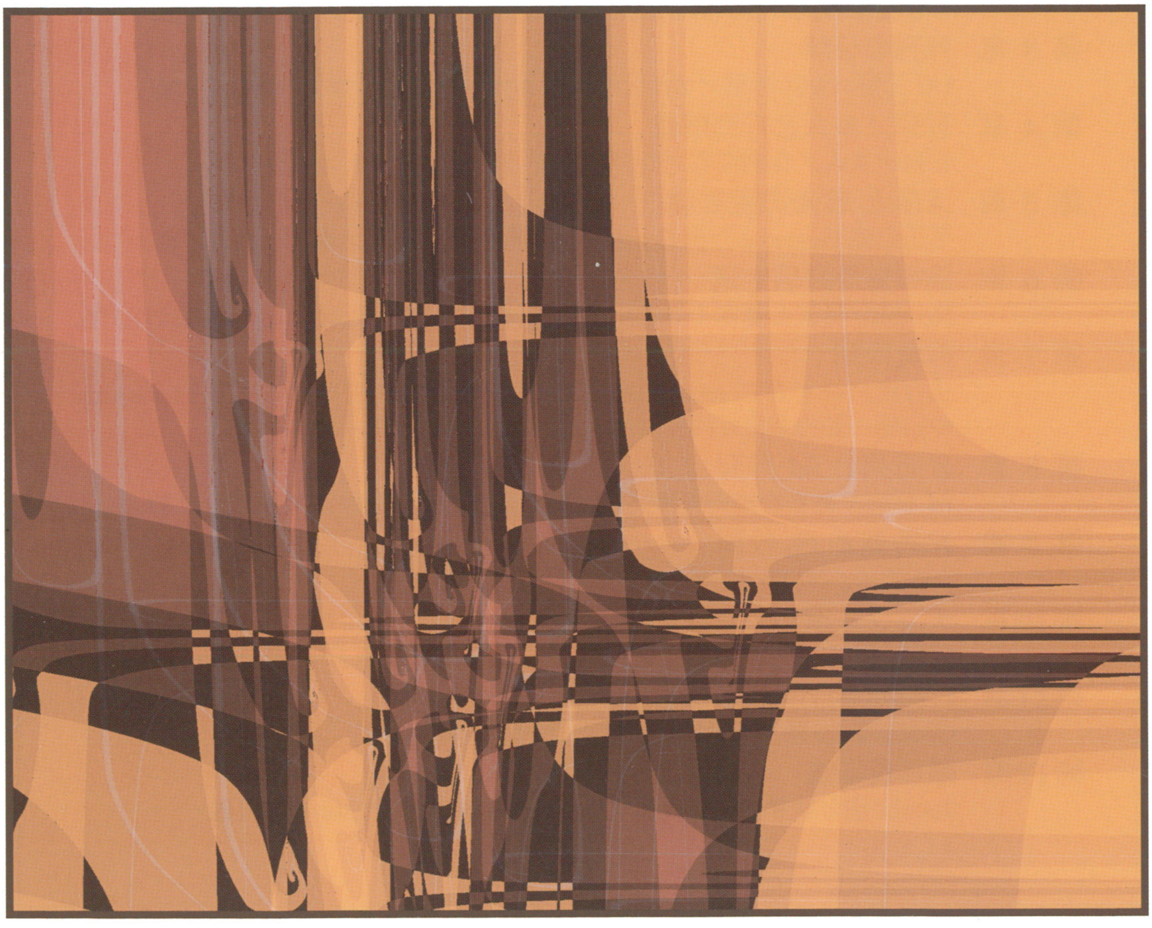
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2010年12月1日発行　第48巻12号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

12
2010

特集　物理における《破れ》と調和



No.570

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 570 December 2010

物理における《破れ》と調和

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2007 年/11 省略
2007 年/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ

数理科学臨時別冊一覧

09 年/11 重点解説 基礎微分幾何
09 年/12 ε–δ 論法再入門
10 年/1 多彩な量子の世界
10 年/3 超関数・フーリエ変換入門
10 年/5 問題例で深める物理
10 年/6 非線形現象と微分方程式
10 年/7 数物系のための圏論
10 年/9 超弦理論を学ぶための場の量子論
10 年/10 重点解説 ジョルダン標準形
10 年/11 重点解説 ベクトル・テンソル

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都 BAL 店
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学

December 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 570

特集／物理における《破れ》と調和

破れた対称性と物理世界

藤川　和男

かつて，C.N. Yang 博士は物理学の研究においても詩とか文学におけるように「好み（taste)」が非常に重要であるといわれたが，一般に物理学においても美的感覚が重要である．美しさの定量的な表現としては物理学では対称性という言葉が思い起こされる．しかし，物理の世界では完璧な対称性というのは稀な現象ともいえる．多くの場合，完璧な対称性がわずかだが壊されていて，そのような破れが我々の扱う物理学の世界で重要な場合が多い．今回の特集の狙いはそのような完全な対称性からのずれがかえって世界をより豊かにしている場合が多いということに焦点を当てて紹介することにある．

もちろん，破れという以上は破れていない世界が暗に想定されており，その意味では完璧な世界というものが研究者の頭の中にあることになる．また完璧な世界というものを想定したとしても，狭義の対称性という言葉では表せないものも多い．今回の特集では，宇宙論とか多粒子の織り成す複雑な効果の集積としての物性物理学に現れる破れから，より単純な真空とかその近傍の現象における対称性の破れにわたる広い分野の解説が与えられる．

まず素粒子の基礎理論である標準理論を考えると，CP 対称性の小さな破れに対する小林・益川理論のような側面から，標準理論の背後に潜む（多分）多粒子的な複雑な現象の具現としての自発的対称性の破れに対する南部理論のような側面もある．さらに，場の量子論としての標準理論という観点からは，最初用意した標準理論では正確に満たされていたバリオン数とレプトン数という概念が，量子化の過程において量子異常（アノマリー）という現象により破れている．これらのすべてが，実際に観測される宇宙における粒子の数と反粒子の数のアンバランスの説明の試みにおいて基本的な役割を果たしている．もし，宇宙に粒子の数と反粒子の数のアンバランスがなければ現在の宇宙は存在しないし，したがって我々も存在しないということになる．さらに，バリオンとかレプトンという概念そのものが，宇宙の進化の過程で生じたものであるという大統一理論のような観点もある．これらの考え方の解説が本特集で与えられる．

宇宙論的な考察では，膨張宇宙を考えれば大局的には時間軸方向にも空間方向にも一様平坦なミンコウスキー空間は成立せず，したがってローレンツ変換のような基本的な対称性にも破れが現れるという可能性があり，この方面の含蓄のある考察も本特集で与えられる．さらに，統計熱力学の大問題であるエントロピー非減少則に対する最近の考察の紹介もある．これらの考察では，巨視的な意味での時間反転の破れ（過去と未来の非対称）が現れるが，これは微視的な場の理論の言葉で言え

ばCP対称性の破れに関係しているのは興味深い．

また，BCSによる超伝導の理論の深い考察から対称性の破れに対する南部理論がどのように生まれたかの解説もある．南部理論は強い相互作用の理論であるQCDにおいても基本的であり，その数値的検証が議論される．物性物理学あるいは多くの自由度が関係した物理学一般では，量子力学から古典力学への移行（量子コヒーレンスの破れ）がどのようなメカニズムで起こるかが基本的な問題になるが，アンダーソン局在という観点からの考察が与えられる．また，多くの自由度を扱う場の理論で基本的になる繰り込み群（あるいはキャラン・ジュマンジーク方程式）は素粒子論から物性理論にいたるまで応用が非常に広い．これは，基本的には素朴なスケール変換あるいはより正確にはワイル変換の量子的な破れ（ワイルアノマリー）として理解される．共形場理論のビラソロ代数の表現論を豊かにしている中心拡大もこのワイルアノマリーに対応している．

また小林・益川理論の誕生の背景について，素粒子の群論的な分類で大きな業績を上げられ，小林・益川両博士の先輩であり指導者でもある大貫先生にエッセイをお書きいただいた．読者の皆様も，これらの多様な解説を楽しまれることを期待する次第である．

（ふじかわ・かずお，日本大学理工学部）

宇宙のバリオン数とCPの破れ



諸井　健夫

1. はじめに

近年の様々な宇宙精密観測の発展は，宇宙に関する我々の理解を定性的なものから定量的なものへと変質させてきた．そして現在，我々は「宇宙はどのような物質で満たされているのか」という問いに対して，かなり精密な議論を行うことが可能となっている．WMAP 7 年間のデータに基づく解析によると，現在の宇宙の質量密度は，暗黒エネルギーが約 73%，暗黒物質が約 23%，そして**バリオン**（陽子，中性子，およびそれらから成る核子）が約 4%を占めている[1]．これら諸成分の起源をそれぞれ明らかにすることは，宇宙の進化を理解する上での重要な課題である．

特にバリオンの起源について考える場合，我々の宇宙には陽子や中性子は存在するが，それらの反粒子（**反バリオン**）はほとんど存在しないという点がまず重要である．自然に作られた反バリオンとして最も多く観測されているのは高エネルギー宇宙線中の反陽子であるが，その量は陽子と比べて 0.1%以下であると共に[2]，その程度の反陽子は宇宙線中の陽子が星間物質と衝突して生成されたとして理解できる．粒子と反粒子は質量や寿命，さらには（符号は逆であるが）電荷の大きさが完全に等しくなるなど，極めて似た性質を持つ．このため，物質のみで構成された世界（即ち我々の宇宙）が存在するのであれば，反物質のみで構成された世界も同様に存在して構わないというのが自然な考え方である．それなのに，なぜ我々の宇宙には物質のみが存在して反物質はほとんど存在しないのであろうか．本稿においては，以上の点に留意しつつ，宇宙に現存するバリオンの起源についての考察を行いたい．

はじめに述べたように，我々の宇宙に存在するバリオンの量（正確にはバリオンの量から反バリオンの量を引いたもの，以下**バリオン数**と呼ぶ）は，宇宙背景放射の揺らぎの性質を調べることにより高い精度で決定されている．WMAP 7 年間のデータに基づく解析によると，バリオンが宇宙のエネルギー密度に占める割合いについては

$$\Omega^{(\mathrm{WMAP})}_{\text{バリオン}} = 0.0456 \pm 0.0016$$

という値が，あるいはバリオンと光子の数密度の比については

$$\eta \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} = (6.19 \pm 0.15) \times 10^{-10}$$

という値が得られている．

また，これとは独立に，宇宙に存在する軽元素量からも η に対しての制限が得られる．軽元素（D, ^{3}He, ^{4}He, ^{6}Li, ^{7}Li）は，宇宙年齢が 1 秒から 100 秒程度の宇宙初期に作られたと考えられている．このシナリオはビッグバン元素合成と呼ばれるが，そこで生成される軽元素量は光子・バリオン比 η の値によって変化する．図 1 に標準的なビッグバン元素合成のシナリオが予言する軽元素量を η の関数としてプロットしてある．これによると，宇

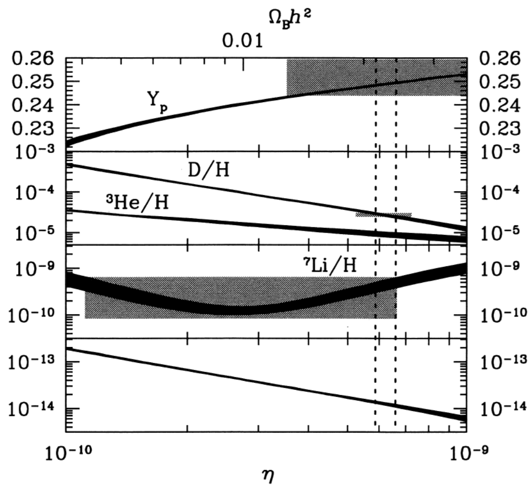


図1　ビッグバン元素合成により生成される軽元素量を $\eta = n_b/n_\gamma$ の関数として表したもの．^{4}He に関しては質量比 $Y_{\rm p} \equiv 4n_{^4{\rm He}}/n_b$ が，それ以外に関しては水素との数密度の比がプロットされている．影のついたボックスは縦が観測値，横が観測値を与える η に対応する．また，宇宙背景放射の揺らぎの観測から示唆される η の値は，点線の間に対応する（郡和範氏の好意による）．

宙背景放射の温度揺らぎから示唆される η の値を用いた場合，Li よりも軽い元素量が観測と誤差の範囲内で一致するということが分かる．

まとめると，現在宇宙にはバリオンと反バリオンの数の差があるというだけでなく，その非対称性の大きさが $\eta \sim 10^{-10}$ 程度であることが明らかとなっている．クォークの閉じ込めが起こる前の十分高温の宇宙においてバリオン・反バリオンはそれぞれクォーク・反クォークとして宇宙に存在していたが，$\eta \sim 10^{-10}$ であるということは，その時期のクォークと反クォークの数の差が全クォーク数に対してわずか100億分の1程度であったことを意味している．宇宙の温度が下がると共にほとんどのクォークと反クォークは対消滅して宇宙から姿を消していくが，その100億分の1の差が生き残り，現在の宇宙の元素の源となるわけである．しかし，このような宇宙のバリオンと反バリオンの差はどのようにして作られたのであろうか？

2. バリオン数生成と CP の破れ

宇宙のバリオン数の起源を考えるとき，「**CP の破れ**」というのは一つの重要なキーワードである．すべての物質には反物質が存在するが，CP とは物質と反物質を入れ替える操作のことを指している．そして，現在知られている4つの力（電磁気力，弱い相互作用，強い相互作用，重力）のうち，弱い相互作用以外は物質と反物質に対して同等の力を及ぼすこと，すなわち CP を保存するということが知られている．

宇宙創成時にバリオンと反バリオンの量が等しかったとすると，その後の宇宙進化においてバリオン数を生成するためには，CP の破れ，即ち物質と反物質の性質の違いが必要である．バリオン数ゼロという CP 変換に対して不変な状態は CP が破れていなければ宇宙が発展してもそのままであることを考えれば，このことは明らかであろう．従って，宇宙のバリオン数を生成する機構は，何らかの CP の破れを内包している必要がある．

先にも述べた通り，素粒子標準模型において CP の破れは弱い相互作用を通してのみ起こるとともに，その破れの起源は**小林・益川行列**[3]に含まれる複素位相にある．このため，素粒子標準模型の枠内で宇宙のバリオン数の起源を説明しようとすると，小林・益川行列を通した CP の破れが宇宙のバリオン数 $n_b/n_\gamma \simeq 6 \times 10^{-10}$ を生成するのに十分であるかということが問題となる．しかしその議論をする前にまず，現存するバリオン・反バリオン非対称性が宇宙創成時から存在したとしてなぜいけないのか，そしてバリオン数は宇宙進化のどの段階で生成されたのかについて考えてみよう．

3. 初期宇宙におけるバリオン数生成

近年の宇宙密度揺らぎの精密観測から，宇宙の密度揺らぎの振幅はほとんどスケールによらず，かつ断熱的であることが明らかとなった．このような密度揺らぎは，**インフレーションシナリオ**が

予言する揺らぎの典型的な性質である．また，インフレーションは宇宙の地平線問題や平坦性問題といったビッグバン宇宙模型の持つ様々な問題の解となるとも考えられている．これらの理由から，現在では，宇宙初期にインフレーション時期が存在したということは，理論・観測双方から強いサポートを受けている．このことが持つ意味を，宇宙のバリオン・反バリオン非対称性の起源という観点から考えてみる．

宇宙論においてインフレーションとは宇宙の加速膨張を指す．そのような急激な膨張が起こるためには，宇宙を満たす物質が，ほとんど宇宙項と同じ状態方程式

$$\frac{p_{\rm inf}}{\rho_{\rm inf}} \simeq -1$$

に従う必要がある．ここで $\rho_{\rm inf}$ と $p_{\rm inf}$ はそれぞれインフレーション時期に宇宙を満たしている物質のエネルギー密度と圧力である．上の性質が満たされると，宇宙が膨張しても $\rho_{\rm inf}$ はほとんど一定に保たれる．通常のインフレーション模型においては，極めて平坦なポテンシャルを持つスカラー場（インフラトン場と呼ばれる）がこの性質を満たす．$\rho_{\rm inf}$ が一定という条件の下，スケールファクター a の満たすべきアインシュタイン方程式

$$\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G_{\rm N}\rho_{\rm inf}}{3} \equiv H_{\rm inf}^2$$

を解くと，$a \propto e^{H_{\rm inf}t}$，即ち宇宙が指数関数的に加速膨張するという結果が得られる（ここで $G_{\rm N}$ は重力定数である）．無論，現在の我々の宇宙を実現するためには，何らかの形でインフレーションが終了し，高温・高密度の熱浴で満たされた状況を実現する必要がある．通常のインフレーション模型においては，現在の宇宙（いわゆるビッグバン宇宙）は，インフレーション後にインフラトン場が様々な素粒子標準模型粒子に崩壊し，宇宙を再加熱することによって実現される．インフラトンの崩壊が終了し，宇宙のエネルギー密度が熱浴中の粒子に転換されたときの温度は宇宙の再加熱温度 $T_{\rm R}$ と呼ばれる．$T_{\rm R}$ の値はインフレーション模型の詳細によるパラメータである．ただし，軽元素合成以降の宇宙進化に影響を与えないためには，再加熱温度は $\sim 1\,{\rm MeV}$ よりも高くなくてはならない．

インフレーションシナリオでは，現在宇宙に存在するすべての物質はインフラトンの崩壊生成物から作られる．これは，インフレーション時期の極めて急激な宇宙膨張によって，物質の密度は一度ほとんどゼロとなるためである．このことはバリオン・反バリオン非対称性に関しても当てはまり，たとえ宇宙創成時にバリオン数が存在していたとしても，それはインフレーションによってゼロにリセットされてしまう．このため，インフレーションが終わって宇宙が再加熱された後にバリオン数を生成する機構が，どうしても必要となるわけである．

4. サハロフの３条件

それでは，実際にバリオン数を生成するためにはどのような条件が必要であろうか．宇宙のバリオン数生成のためにはCPの破れが必要であることは既に述べた．また，インフレーション後にバリオンと反バリオンの量が等しかったとすると，バリオン数が保存量である限りバリオン数はどれだけ時間が経ってもゼロのままである．従って，バリオン数生成のためには，バリオン数を保存しない相互作用が必要である．さらに３番目の条件として，熱平衡からのずれが必要である．このことは以下のように理解される．宇宙が完全に熱平衡にある場合，同じエネルギーの状態は等確率で実現される．その結果，バリオン数が保存しなければ，熱平衡状態においてはバリオンと反バリオンの量は熱平均を取ると等しくなってしまう．

まとめると，宇宙のバリオン数生成のためには以下の３つの条件が満たされる必要がある：

- CPの破れ．
- バリオン数を破る相互作用の存在．
- 熱平衡からのずれ．

これらはサハロフの3条件と呼ばれている．

5. 素粒子標準模型の枠内での宇宙のバリオン数生成

それでは，素粒子標準模型の枠内で宇宙のバリオン・反バリオン非対称性の起源が理解できるかについて考えてみる．インフレーション後のバリオン数がゼロであった状態から話を始めると，その後の宇宙膨張はアインシュタイン方程式によって，また物質密度の変化は素粒子標準模型の相互作用に基づくボルツマン方程式によって完全に決定される．このため，原理的にはバリオン数の時間変化は第一原理によって完全に決定されることになる．

素粒子標準模型の枠内でバリオン数非保存過程の起源は，**電弱アノマリー**

$$\partial_\mu J^\mu_{\rm B} = \partial_\mu J^\mu_{\rm L} = \frac{3g_2^2}{64\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{W}^{(a)}_{\mu\nu}\mathcal{W}^{(a)}_{\rho\sigma} + \frac{3g_1^2}{64\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{B}_{\mu\nu}\mathcal{B}_{\rho\sigma},$$

のみである（詳細については本誌久保治輔氏の解説を参照）．ここで $J^\mu_{\rm B}$ と $J^\mu_{\rm L}$ はバリオン数とレプトン数カレント，$\mathcal{W}^{(a)}_{\mu\nu}$ と $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ は $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ の場の強さを表すテンソル，$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は完全反対称テンソル，そして g_2 と g_1 は $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ のゲージ結合定数である．上式の右辺がゼロとならないゲージ場の配位が存在すると，バリオン数とレプトン数はそれぞれ保存しなくなる．特に $SU(2)_L$ に関しては $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{W}^{(a)}_{\mu\nu}\mathcal{W}^{(a)}_{\rho\sigma} \neq 0$ となる配位が存在する．例えば，高温・高密度の初期宇宙で重要となるものとしてスファレロンと呼ばれる配位が存在し，その励起に必要なエネルギーはヒッグス場の期待値を v とすると $4\pi v/g_2$ の程度である．詳細な計算によると，宇宙初期の電弱アノマリーを通じたバリオン数・レプトン数の非保存過程は $10^2\,{\rm GeV} \lesssim T \lesssim 10^{12}\,{\rm GeV}$ という温度で重要となる[4]．

素粒子標準模型の枠内では，電弱スケール以下の宇宙温度ではスファレロン等の励起が起こらず，

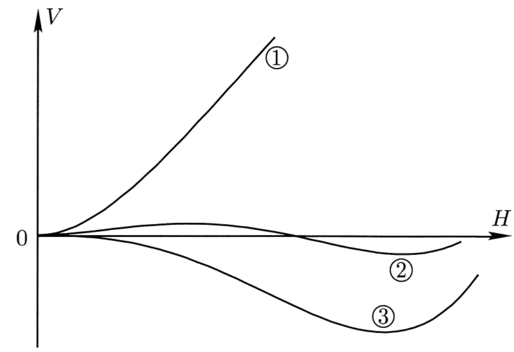


図2 温度効果を取り入れたヒッグスポテンシャル（自由エネルギー）V の概形．横軸はヒッグス場の振幅 H．①は十分高温（相転移前），②は相転移時，③は十分温度が下がった後（相転移後）のポテンシャル．

バリオン数生成は不可能である．一方，温度が電弱スケールよりも高い状況では，熱平衡からのずれを実現することが難しい．

素粒子標準模型の枠内での宇宙のバリオン数生成に関してこれまで議論されてきた可能性は，電弱相転移時の熱平衡からのずれに伴ってバリオン数を生成するというシナリオである（この場合，電弱スケールに比べて十分高い再加熱温度を持つインフレーション模型を考えることとなる）．十分高い温度において，ヒッグス場 H のポテンシャル（正確には自由エネルギー）は $H=0$ のみに極小点をもつ（図2の①参照）．しかしヒッグス粒子の質量が十分軽ければ，相転移温度においては $H=0$ の他にもう一つの極小点が現れる（図2の②参照）．この場合 $H=0$（偽の基底状態）から $H\neq 0$（真の基底状態）へのトンネル効果によって，1次の電弱相転移が進行する．この相転移に伴うバリオン数生成のシナリオ（**電弱バリオン数生成**と呼ばれる）は，以下のように進行する[5]：

1. 1次の電弱相転移に伴い，過冷却状態から真の基底状態を核とする泡が空間の様々な点にランダムに生成される．泡の内部ではヒッグス場の期待値が $H\neq 0$ となることで電弱対称性が破れているが，外部は $H=0$ であり対称性は保たれたままである．
2. 泡の「壁」とクォーク・反クォークの相互作

用に CP の破れが存在すると，「壁」におけるクォークと反クォークの反射率に差が現れる．その結果，泡の内部と外部それぞれにおいてバリオン・反バリオンの量の差が生じる．

3. 泡の外部はヒッグス場の期待値がゼロであるため，電弱アノマリーを通じたバリオン数非保存過程が十分効率良く引き起こされ，その結果バリオン数が変化する．一方泡の内部では，ヒッグス場の期待値が大きくスファレロン励起が無視できるため，バリオン数の変化は起こらない．この結果，宇宙全体として見たときにはバリオン数が作られる．

4. 様々な地点で作られた泡の「壁」の衝突と共に宇宙は一様化され，電弱相転移が終了する．その後，すべての空間点で $H \neq 0$ となり，バリオン数は変化しなくなる．

電弱バリオン数生成のシナリオは，素粒子標準模型の枠内で宇宙のバリオン・反バリオン非対称性生成の可能性を与えるため，とても魅力的である．しかし残念ながら，以下に述べる 2 つの理由により，このシナリオで十分な大きさのバリオン数を生成することは困難と考えられている．

素粒子標準模型の枠内での電弱バリオン数生成の困難の第一の理由は，現在のヒッグス粒子質量の下限値を考慮すると 1 次の電弱相転移が実現されないという点である．格子理論や熱場の理論を用いた計算によると，電弱相転移が 1 次であるためにはヒッグス粒子の質量は 70–75 GeV よりも軽くなくてはならない[6]．しかし，LEP 実験によりヒッグス粒子の質量は 114.4 GeV 以上であることが明らかとなっているため[7]，標準模型の枠内では 1 次の電弱相転移を実現することは不可能である．

さらに，電弱バリオン数生成のもう一つの困難として，素粒子標準模型における CP の破れ，即ち小林・益川行列を通じた CP の破れが宇宙のバリオン・反バリオン非対称性を説明するには小さすぎるという点が挙げられる．良く知られているように，小林・益川機構によって CP を破るには，

3世代以上のクォークがヒッグス場から質量を得る必要がある．従って，現在知られているすべてのクォーク質量の効果がプロセスに寄与しない限り，電弱相転移時に生成される泡の「壁」での粒子と反粒子の反射率に差を作ることはできない．しかし，電弱相転移の温度は $\sim 100\,\mathrm{GeV}$ 程度と，トップクォーク以外のクォーク質量に比べて高いスケールである．このため以下に見るように，宇宙に存在するバリオン数を説明するには，小林・益川行列の効果は小さすぎることとなる．物理量はクォークの基底のユニタリー変換に対して不変でなくてはならないことを用いると，CPの破れは以下の量に比例することとなる：

$$\mathcal{J} \equiv \Im\det[M_u M_u^\dagger, M_d M_d^\dagger]$$
$$\equiv 2J \prod_{i>j}(m_{u_i}^2 - m_{u_j}^2)(m_{d_i}^2 - m_{d_j}^2).$$

ここで M_u，および M_d は（ゲージ基底での）アップタイプ，およびダウンタイプクォークの質量行列であり，m_{u_i}，および m_{d_i} は i-世代のアップタイプ，およびダウンタイプのクォーク質量を表す．また，J は Jarlskog 不変量[8]と呼ばれるものであり，小林・益川行列 V の行列要素を用いて

$$J = \Im[V_{ud} V_{cs} V_{us}^* V_{cd}^*],$$

と与えられる．現在知られている小林・益川行列要素の値を用いると，$J \simeq 3\times 10^{-5}$ である．$\mathcal{J}$ を電弱バリオン数生成の典型的なエネルギースケールである電弱スケール（ここではヒッグス場の真空期待値 $v \simeq 174\,\mathrm{GeV}$ にとる）を使って無次元化すると，$\mathcal{J}/v^{12} \sim 4\times 10^{-22}$ と極めて小さな値となる．詳細な計算によると，このように小さな値では「泡」の壁におけるクォークと反クォークの反射率の差は小さすぎて，宇宙のバリオン数を生成することは不可能である[9]．

CPの破れはこれまで B-および K-中間子系で観測されているが，小林・益川機構以外からのCPの破れを示唆する実験結果はまだ得られていない．特に近年，Belle および BaBar 実験は B-中間子におけるCPの破れの精密な測定を行い，観測されたCPの破れが小林・益川行列によるものとして理解できることを，高い精度で明らかにした．以上の事実は，少なくとも現在までに観測された B-および K-中間子系でのCPの破れが宇宙のバリオン・反バリオン非対称性の起源とは無関係であるということを強く示唆するものである．宇宙のバリオン数生成のためには，小林・益川行列に含まれる複素位相以外のCPの破れが必要であろう．

6. 様々なバリオン数生成のシナリオ

素粒子標準模型の枠内では，現在宇宙に存在するバリオン・反バリオン非対称性を作ることは困難であるが，素粒子模型を標準模型から拡張すればバリオン数生成は十分可能となる．

現在多くの研究者が興味を持っているシナリオの一つに，右巻きニュートリノを用いたバリオン数生成のシナリオ（レプトジェネシスシナリオと呼ばれる）がある[10]．このシナリオは，まず右巻きニュートリノの崩壊によってレプトン・反レプトンの非対称性を作り，それを電弱アノマリーによってバリオン・反バリオンの非対称性に転化するというものである．レプトジェネシスシナリオにおけるCPの破れとしては，右巻きニュートリノのマヨラナ質量に付随する位相やニュートリノの混合行列（牧・中川・坂田行列[11]）内の位相などが存在する．ニュートリノに関するCPの破れはまだ実験的には強い制限は与えられておらず，これらの位相は宇宙のバリオン数を生成するに十分な大きさをとることができる．

また，別のシナリオとしては Affleck–Dine シナリオと呼ばれるシナリオも存在する[12]．これはバリオン数を持つスカラー場の凝縮をまず生成し，そのスカラー場を崩壊させることによって通常のバリオン・反バリオンの数密度の間に差を作るというシナリオである．特に超対称模型においてはバリオン数を持つスカラー場（即ちスカラークォーク）が存在するため，Affleck–Dine シナリオは比較的容易に実現することができる．このシナリオでは，バリオン数生成に必要なCPの破れはスカ

ラークォーク凝縮の初期振幅の位相として与えられる．従って，宇宙バリオン数の起源を与えるCPの破れの効果をエネルギー的に検証することはできない．

電弱相転移に伴って宇宙のバリオン数を生成するというアイデアについては，電弱相転移を1次にすると共に，新たなCPの破れの起源を導入する必要がある．例えば超対称模型においては，十分軽いスカラートップクォークを考えることで，これらの2つの問題点が回避できるという指摘がある[13]．この場合，特にCPの破れについては超対称模型に内在するパラメータの位相を用いることになるが，それらの位相は電子や中性子の電気モーメント，B-中間子のCPの破れ等に影響を与える可能性がある．

7. まとめ

我々の宇宙に存在するバリオン・反バリオン非対称性の起源は，宇宙の進化を探るという観点からだけでなく，素粒子物理学の理解の上でも極めて重要かつ興味深い問題である．既に述べたように，素粒子標準模型の枠内でのバリオン数生成は極めて難しく，宇宙のバリオン・反バリオン非対称性が作られるに当たっては素粒子標準模型を超える何らかの物理が本質的かつ重要な役割を果たしていたと考えられる．

素粒子標準模型を超える物理に関してはLHC実験が既に開始されており，今後数年のうちに多くの新たな情報が得られると期待されている．また，LHC-B実験やSuper-BファクトリーからB-中間子のCPの破れについて，またニュートリノ振動実験からはニュートリノに関するCPの破れについて，それぞれ理解が進む可能性がある．これら様々な実験の結果を総合的に考察し，素粒子標準模型を超える物理の姿を明らかにして行くことは，宇宙に存在するバリオン・反バリオン非対称性の起源を理解する上でも重要であろう．

参考文献

1) E. Komatsu *et al.*, arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO].
2) 最新の観測としては，PAMELA Collaboration, arXiv:1007.0821 [astro-ph.HE].
3) M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.
4) D. Bodeker, G.D. Moore and K. Rummukainen, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 056003.
5) 詳しい解説としては，例えばA.G. Cohen, D.B. Kaplan and A.E. Nelson, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **43** (1993) 27.
6) W. Buchmuller and O. Philipsen, *Phys. Lett. B* **397** (1997) 112; F. Csikor, Z. Fodor and J. Heitger, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 21.
7) C. Amsler *et al.* [Particle Data Group], *Phys. Lett. B* **667** (2008) 1.
8) C. Jarlskog, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 1039.
9) M.B. Gavela, M. Lozano, J. Orloff and O. Pene, *Nucl. Phys. B* **430** (1994) 345; M.B. Gavela, P. Hernandez, J. Orloff, O. Pene and C. Quimbay, *Nucl. Phys. B* **430** (1994) 382; P. Huet and E. Sather, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 379.
10) M. Fukugita and T. Yanagida, *Phys. Lett. B* **174** (1986) 45.
11) Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28** (1962) 870.
12) I. Affleck and M. Dine, *Nucl. Phys. B* **249** (1985) 361.
13) M.S. Carena, M. Quiros and C.E.M. Wagner, *Phys. Lett. B* **380** (1996) 81; M.S. Carena, M. Quiros, A. Riotto, I. Vilja and C.E.M. Wagner, *Nucl. Phys. B* **503** (1997) 387.

（もろい・たけお，東京大学大学院理学系研究科）

標準理論におけるバリオン数の破れ

カイラルアノマリー



久保　治輔

1. カイラルアノマリー

カイラルアノマリーについて，**藤川流**のアノマリーの解釈に基づいて一般的な考察から始める．ローレンツ群は**ノンコンパクト**な群である．これは，ローレンツブーストは回転と違い，変換された座標を限りなく無限にすることができることに由来している．つまり，変換のパラメータの領域が無限なのである．ノンコンパクト群には，ユニタリな有限次元の行列表現は存在しないという定理がある．この事実が最初にあらわになるのは，フェルミオン場 $\psi(x)$ のローレンツ変換を考えるときである．$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \ldots)\, x^\nu$ というローレンツ変換の下で，$\psi(x)$ は $\psi(x) \to \psi'(x) = S(\omega)\psi(\Lambda^{-1}x)$ と変換するとしよう．$S(\omega)$ は 4×4 の行列式 $=1$ の複素行列だが，Λ がローレンツブーストを含む場合はユニタリーになれないために，$\psi^\dagger\psi$ はローレンツ不変になれないのである．ここで，**Dirac 共役** $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ を導入する．γ^0 は，ガンマ行列 γ^μ $(\mu = 0,1,2,3)$ の一つで，γ^μ は反交換関係 $\{\ \gamma^\mu\ ,\ \gamma^\mu\ \} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}$ を満たしている（$\mathbf{1}$ は 4×4 の単位行列，$g^{\mu\nu}$ はミンコフスキー時空の計量で，ここでは，$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag.}(1,-1,-1,-1)$ とし，空間成分は $i,j,k,\ldots$ を使う）．これより，$\Sigma^{\mu\nu} = (i/4)[\ \gamma^\mu\ ,\ \gamma^\nu\ ]$ は，ローレンツ群の生成演算子の交換関係を満たしていることが示されるので，それ自身がローレンツ群の生成演算子であることになる．従って，$S(\omega) = \exp -(i/2)\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}$ と書ける．Σ^{ij} は回転の生成演算子なので，エルミート行列でなければならないので，γ^i を反エルミート行列と仮定しよう．これは，$(\gamma_i)^2 = -1$ からも示唆される．γ^0 も反エルミート行列とすると，ローレンツブーストの生成演算子 $\Sigma^{\mu\nu}$ もエルミート行列になってしまい，$S(\omega)$ もユニタリになるので，これはあり得ない．γ^0 はエルミート行列としよう．従って，$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$ となり，$S(\omega)^{-1} = S(-\omega) = \gamma^0 S(\omega)^\dagger\gamma^0$ が示せる．これが，Dirac 共役に γ^0 が登場する理由なのである．

Dirac 共役とカイラルアノマリーに何の関係があるのだろうか．ψ は $S(\omega)$ で，$\bar{\psi}$ は $S^{-1}(\omega)$ でローレンツ変換するので，経路積分のメジャー $\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$ はマニフェストにローレンツ不変になる（$\det S = 1$ などという性質を使う必要がない）．次に，ユニタリ変換

$$\psi_\alpha(x) \to \psi_{\alpha U}(x) = U_{\alpha\beta}(x)\psi_\beta(x) = \int d^4y\, \hat{U}_{\alpha\beta}(x,y)\psi_\beta(y), \quad (1)$$

$$\hat{U}_{\alpha\beta}(x,y) = U_{\alpha\beta}(x)\delta^4(x-y)$$

を考えてみる．U は，4×4 のユニタリ行列とし，変換後の場 $\psi_U(x)$ のローレンツ変換性が変わらないとする．つまり，$[U\ ,\ S(\omega)] = [U\ ,\ S^{-1}(\omega)] = 0$ でなけばならない．これより，$[U^\dagger\ ,\ S^\dagger(\omega)] = 0$ となるが，$[U^\dagger\ ,\ S(\omega)] = [U^\dagger\ ,\ S^{-1}(\omega)] = 0$ は導かれない．ところが，γ^0 を使って $\bar{U} = \gamma^0 U^\dagger\gamma^0$

を定義すると，$\bar{U}$ は $S^{-1}(\omega)$ と可換になる．すなわち，$\mathcal{D}\bar{\psi_U}\mathcal{D}\psi_U$ は**マニフェスト**にローレンツ不変である．しかし，

$$\mathcal{D}\bar{\psi_U}\mathcal{D}\psi_U = [\mathrm{Det}\ \hat{U}\ \mathrm{Det}\ \hat{\bar{U}}]^{-1}\ \mathcal{D}\bar{\psi_U}\mathcal{D}\psi_U$$

となり，経路積分のメジャーのマニフェストなローレンツ不変性を優先したために，U がユニタリー行列にも関わらず，変換のヤコビアン $J=[\mathrm{Det}\ \hat{U}\ \mathrm{Det}\ \hat{\bar{U}}]^{-1}$ がマニフェストに 1 でなくなっているのである．

次に，ユニタリー行列 U のとれる一般的な形について考える．まず，連続的に $\mathbf{1}$ とつながっている微小変換 $U=\mathbf{1}+\delta U$ を考える．U はローレンツ不変（$S(\omega)$ と可換）な 4×4 の行列なので，δU もそうである．4×4 のローレンツ不変な行列は，$\mathbf{1}$ と $\gamma_5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ だけであるから，2 つの可能性しかない．

$$U_V = e^{i\alpha_V\mathbf{1}}, \quad U_A = e^{i\alpha_A\gamma_5}. \qquad (2)$$

さらに，$\bar{U}_V=U_V^\dagger$ と $\bar{U}_A=U_A$ となり，結局，U_A の場合だけが，経路積分のヤコビアンがマニフェストに 1 にならず，$[\mathrm{Det}\ \hat{U}_A]^{-2}$ となる．ここまでをまとめると，ローレンツ群はノンコンパクトなので，ローレンツ不変なものの定義には Dirac 共役が必要になる．経路積分のメジャーのマニフェストなローレンツ不変性を優先すると，ローレンツ不変なユニタリー変換 U_A のヤコビアンはマニフェストに 1 でなくなる．γ_5 は，偶数次元にしか存在しないので，我々の時空が 4 次元で，しかも，ミンコフスキー空間であるから，カイラルアノマリーに“悩まされている”と言ってもいいだろう．

次に，公式 $\mathrm{Det}\ A=\exp\mathrm{Tr}\ln A$ を使うとヤコビアン J は形式的に

$$J=[\mathrm{Det}\hat{U}_A]^{-2}=\exp\left[-i2\int d^4x\alpha_A(x)\mathcal{A}(x)\right], \qquad (3)$$

$$\mathcal{A}(x)=\int d^4y\delta_{m,n}\delta^4(x-y) \times\varphi^\dagger_{m,\alpha}(x)[\gamma_5]_{\alpha\beta}\varphi_{n,\beta}(y) \qquad (4)$$

と書ける．ここでは，変換のパラメータ α_A を x に依存させた．また，$\varphi_{m,\beta}(x)$ は規格化された完全形

$$\int d^4x\varphi^\dagger_{m,\alpha}(x)\varphi_{n,\alpha}(x)=\delta_{m,n},$$
$$\sum_m\varphi_{m,\alpha}(x)\varphi^\dagger_{m,\beta}(y)=\delta_{\alpha\beta}\delta^4(x-y)$$

をなしているとした．次に，アニマリー $\mathcal{A}(x)$ がもしゼロでないのなら，どのように書けるかについて考えてみる．まず，U_A の変換のパラメータを $\alpha_A(x)$ とすると，ψ の運動項に微分があるので，作用は $S\to S-\int d^4x\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\partial_\mu\alpha_A(x)$ と変換する．一方，(2) を変数変換として考えると，経路積分は変数変換に対し不変なので，$0=\int d^4x\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\partial_\mu\alpha_A(x)+2\alpha_A(x)\mathcal{A}(x)\rangle$ となり，$j^\mu_5(x)=\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$ とすると，

$$\langle\partial_\mu j^\mu_5(x)\rangle = 2\mathcal{A}(x) \qquad (5)$$

が得られる．完全形をなす $\varphi_{m,\alpha}$ の次元は 2 なので，$\mathcal{A}(x)$ は，次元が 4 のアクシャルスカラーでなければならない．さらに，$\mathcal{A}(x)$ の計算は正則化を定義して実行しなければならないが，もし，答えが正則化に依存していないとすると，正則化で必ず導入される次元をもったパラメータに依存しないはずである．また，$\mathcal{A}(x)$ が，あるローカルな次元 4 以下の演算子の（微小）カイラル変換で書くことができるのなら，作用に初めからその項を入れておくと，ヤコビアン J を抹殺できる．例えば，$\mathcal{A}(x)=\alpha_A\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\phi(x)$ なら，作用に $\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x)$ を足しておけばよい（$\phi(x)$ はスカラー場）．従って，真のアノマリー $\mathcal{A}(x)$ は，次元が 4 のアクシャルスカラーで（実は，$\mathcal{A}(x)$ は次元が 4 以下の演算子の和であることは，quantum action principle で保証されている．もちろん，ゼロのときはゼロ），次元が 4 以下のローカルな演算子のカイラル変換で書くことができないものでなければならない．

さらに，ψ があるゲージ群の非自明な表現になっている場合は，j^μ_5 はゲージ変換に対して不変になるように拡張されている．その場合は，もちろん，$\mathcal{A}(x)$ もそのゲージ変換に対して不変になっ

ていなければならない．事実，そのような条件を満たす演算子が唯一存在するのである．$\mathcal{A}(x)$ は，$\mathcal{A}(x)=a\partial_\mu K^\mu(x)$ と**全微分**で表され，$K^\mu(x)$ は，後からその具体的な形を示すが，（Chern–Simons form と呼ばれる）ゲージ場のみ関数となっている．a は具体的に計算しなければならない係数で，例えば，ゲージ群が $SU(N)$ の場合で，ψ がその基本表現の場合は，$a=1$ となる．何種類かのゲージ場が存在する場合は，各々の Chern–Simons form にそれぞれの係数をかけたものの和になる．

2. バリオン数の破れ I—アノマリー

素粒子の標準理論は，$SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ に基づいたゲージ理論で，部分群 $SU(2)_L\times U(1)_Y$ は Higgs 機構によって $U(1)_{\rm em}$ に破れている．標準理論のラグラジアンは，強い相互作用（QCD），弱電ゲージ相互作用，湯川相互作用，Higgs 場の質量項とその自己相互作用を記述する部分から成り立っている．さらに，バリオン数やレプトン数保存は理論全体の対称性に基づく保存則になっている．しかし，理論が量子化されるとこれらの対称性はアノマリーによって破れている．以下では，このバリオン数とレプトン数のアノマリーによる破れについて考察する．QCD と $U(1)_Y$ 相互作用，ヒッグス場は無視して考える．まず QCD については，バリオン数とレプトン数に対応している電流 j^μ_B と j^μ_L はアクシャルベクトルではなく，真のベクトルなので，アノマリー (4) の $\mathcal{A}$ に QCD のゲージ場が寄与しないからである．$U(1)_Y$ のゲージ場の寄与はあるが，後から分かるが，実際には $\Delta B\neq 0$ や $\Delta L\neq 0$ の状態遷移に寄与しない．ヒッグス場は (4) に寄与しない．

最初に，j^μ_B と j^μ_L はアクシャルベクトルではないのに，すなわち，考えている変換が U_V なのに，なぜ，アノマリーが存在できるのかを考えよう．$SU(2)_L$ ゲージ場は，左巻きのフェルミオン場としか結合しない．つまり，$SU(2)_L$ ゲージ理論は QCD と違って，左巻き ψ_L と右巻き ψ_R のフェルミオン場を区別している**カイラルなゲージ理論**である．そこで経路積分のメジャーのローレンツ不変性について再度考える．4 成分のフェルミオン場は γ_5 が対角のとき（Weyl 表現のとき）$\psi=(\psi_L,\psi_R)$ と書ける．このとき，ローレンツ変換は，ψ_L と ψ_R をミックスしない．すなわち，$\psi_L(x)\to\psi'_L(x)=S_L(\omega)\psi_L(\Lambda^{-1}x)$，$\psi_R(x)\to\psi'_R(x)=S_R(\omega)\psi_R(\Lambda^{-1}x)$ となる．ところが，（2 成分の）共役された場をそれぞれ $\bar\psi_L=\psi_L^\dagger$，$\bar\psi_R=\psi_R^\dagger$ とすると，$\bar\psi_L(x)\to\bar\psi'_L(x)=\bar\psi_L(\Lambda^{-1}x)S_R^{-1}(\omega)$，$\bar\psi_R(x)\to\bar\psi'_R(x)=\bar\psi_R(\Lambda^{-1}x)S_L^{-1}(\omega)$ と変換される．従って，マニフェストにローレンツ不変なメジャーは

$$\left[\mathcal{D}\bar\psi_R\mathcal{D}\psi_L\right]\left[\mathcal{D}\bar\psi_L\mathcal{D}\psi_R\right] \tag{6}$$

となる．それぞれの [ ] がマニフェストにローレンツ不変である．しかし，$SU(2)_L$ ゲージ理論は ψ_L と ψ_R を区別するので，U_V 変換のヤコビアンを，ψ_L の変換についてのヤコビアンと ψ_R の変換についてのヤコビアンを別々に考えてみる．即ち，$\left[\mathcal{D}\bar\psi_L\mathcal{D}\psi_L\right]\left[\mathcal{D}\bar\psi_R\mathcal{D}\psi_R\right]$ という組合せでメジャーの変化を考えてみる．もちろん，組合せによってローレンツ不変性が破れることはないが，これで，U_V 不変性は自明ではないことが明らかになっただろう．事実，QCD，湯川相互作用と $U(1)_Y$ 相互作用を無視すれば，ψ_R は自由な場なので，$\left[\mathcal{D}\bar\psi_R\mathcal{D}\psi_R\right]$ のヤコビアンはトリビアルである．一方，ψ_L は，$SU(2)_L$ ゲージ相互作用をしているので，非自明なアノマリー $\mathcal{A}$ が存在する可能性がある．

今，クォークのバリオン数を 1/3，レプトン数を 0，レプトンのバリオン数を 0，レプトン数を 1 とすると，各々の電流は

$$j^\mu_B=(1/3)\sum_{{\rm color},q={\rm u,d},\dots,{\rm t}}\bar\psi_q\gamma^\mu\psi_q\ , \tag{7}$$

$$j^\mu_L=\sum_{l=e,\mu,\dots,\nu_\tau}\bar\psi_l\gamma^\mu\psi_l \tag{8}$$

と書ける．すべての ψ_L は（そのバリオン数とレプトン数に比例する部分を除くと）同じだけ (4) のアノマリー $\mathcal{A}(x)$ に寄与するので，$\mathcal{A}(x)$ は，バリオン数については，$(1/3)N_gN_C=3$ 倍，レプト

ン数についても同様，(1)$N_g = 3$ 倍の $\partial_\mu K^\mu(x)$ となる．ここで，N_g は，$SU(2)_L$ ダブレットの数（= 世代数）で，N_C はカラーの数である．また，ψ_R は $SU(2)_L$ ゲージ場と相互作用しないので，$SU(2)_L$ ゲージ場の Chern–Simons form の係数に寄与しない．従って，(5) の左の係数 2 は 1 となる．結局，（$U(1)_Y$ ゲージ場の寄与を無視すると）

$$\langle \partial_\mu j_B^\mu \rangle = \langle \partial_\mu j_L^\mu \rangle = \mathcal{A} = 3\ \partial_\mu K^\mu \tag{9}$$

となる．Chern–Simons form は，$A_\mu = A_\mu^a \sigma^a/2$ $(a = 1, 2, 3)$ を $SU(2)_L$ のゲージ場とすると（σ^a はパウリの行列）

$$K^\mu = \frac{g^2}{8\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[A_\nu \partial_\alpha A_\beta - \frac{i2g}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right] \tag{10}$$

である．実際は $U(1)_Y$ ゲージ場もアノマリーに寄与するが，$SU(2)_L$ の場合と同じように $\langle \partial_\mu j_B^\mu \rangle$ と $\langle \partial_\mu j_L^\mu \rangle$ への寄与が同じである．従って，$\langle \partial_\mu j_{B-L}^\mu \rangle = 0$ は厳密に成り立っている．

3. バリオン数の破れ II
—巻き数とインスタントン

バリオン数は $Q_B = \int d^3x j_B^0$ なので，j_B^i は $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ で $|\boldsymbol{x}|^{-2}$ より早くゼロになると仮定すると，(5) は (10) を使うと，

$$\begin{aligned}\Delta Q_B &= \Delta Q_L \\ &= 3\int d^3x \left\{\partial_i K^i(x)|_{t=\infty} - \partial_i K^i(x)|_{t=-\infty}\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

と書ける．この式の左側を理解するためには少し準備する必要がある．まず $SU(2)_L$ ゲージ理論の真空の構造は**単純自明ではない**ことから始める．このことはカイラルアノマリーと密接に関係している．ゲージ理論の前に，半径 R の円運動を強制されている粒子の 1 次元運動を考えてみよう．そして時刻 $t = 0$ と T で粒子は同じ場所にいるという境界条件を課してみる．1 次元の問題なのに，粒子の軌道は一意的に決まらない．1 回まわってもとに戻る軌道もあれば，n 回まわる軌道もある．同じ境界条件を満たしている軌道は**巻き数 $\boldsymbol{n}$** で

分類されている．同じように，非可換ゲージ場の配位（軌道）もホモトピークラス（巻き数）に分類することができる．

フェルミオン場はないと仮定し，$A_0(x)=0$ というゲージをとる．このゲージの下では，ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \mathrm{Tr}\left(E^i E^i + B^i B^i\right) \tag{12}$$

となる．E^i, B^i は $E^i = F_{0i}, B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$ と定義されている．$A_0 = 0$ はまだゲージを完全に固定していなく，変換の行列 $U \in SU(2)$ が **$\boldsymbol{t}$ に依存しないと** $U(\boldsymbol{x})\partial_0 U^\dagger(\boldsymbol{x}) = 0$ となり $A_0(x) = 0$ ゲージに留まっている．即ち，理論はゲージ変換

$$A_k(x) \to U(\boldsymbol{x})A_k U^\dagger(\boldsymbol{x}) + \frac{i}{g}U(\boldsymbol{x})\partial_k U^\dagger(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

の下でまだ不変である．よって，$A_k(x) = 0$ と $A'_k(x) = (i/g)U(\boldsymbol{x})\partial_k U^\dagger(\boldsymbol{x})$ は物理的に同等になると思われる．事実 $E^i = B^i = E'^i = B'^i = 0$ となっている．ところが $U(\boldsymbol{x})$ に

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} U(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I} \tag{14}$$

という条件を課すと，$A_k(x) = 0$ と $A'_k(x) = (i/g)U(\boldsymbol{x})\partial_k U^\dagger(\boldsymbol{x})$ は必ずしも連続的なゲージ変換でつながっていないことが分かる．条件 (14) のために，$|\boldsymbol{x}| = \infty$ を同一点として見なすことができるので，条件 (14) を満たす $U(\boldsymbol{x})$ は S^3 から $SU(2)$ への写像を定義していることになる．群 $SU(2)$ の多様体は S^3 なので，写像 $S^3 \to S^3$ と同じである．この写像は，ホモトピークラスに分類されることが知られている．写像 $S^3 \to S^3$ の場合のホモトピー群は $\Pi_3(S^3) = \boldsymbol{Z}$ となり，巻き数 n で分類されている．つまり，$A_k(x) = 0$ と $A'_k(x)$ は連続的につながっていない物理的に異なった古典場として理解しなければならない．次に，(10) で定義した K^0 の空間積分

$$W[\boldsymbol{A}] = \int d^3\boldsymbol{x} K^0(x) \tag{15}$$

に注目すると，時間によらないゲージ変換 (13) の下で

$$W[\boldsymbol{A}] \to W[\boldsymbol{A}^U] = W[\boldsymbol{A}] + \omega[U], \tag{16}$$

$$\omega[U] = \left(\frac{1}{24\pi^2}\right)\int d^3\boldsymbol{x}\epsilon^{ijk} \times \mathrm{Tr}\left(U\partial_i U^\dagger U\partial_j U^\dagger U\partial_k U^\dagger\right) \tag{17}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{A}$ は $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ で $1/|\boldsymbol{x}|$ より早くゼロになると仮定した．もちろん，$U(\boldsymbol{x})$ は条件 (14) を満たしているとしているが，この $\omega[U]$ が $U(\boldsymbol{x})$ の定義する $S^3 \to S^3$ の巻き数なのである．つまり，$W[\boldsymbol{A}]$ は $n=0$ のクラスのゲージ変換 $\mathcal{G}_0$ の下では不変であるが，$n \neq 0$ の**ホモトピカルに非自明なゲージ変換** $\mathcal{G}_n$ の下では不変でない．即ち，古典場のレベルでは真空は無数の巻き数の違うセクタから成り立っている．しかし，量子論では，真空はホモトピカルに分類されたセクタの足し算になっていなければならない．これは，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}_n$ と可換であること，$\mathcal{G}_n$ はユニタリ演算子であることを使って証明できる．

次に，巻き数とインスタントンの関係について調べてみる．時間座標を $t \to -i\tau$ と複素平面上に拡張して時空を Euclid 化する．インスタントンは，Euclid 空間で定義された理論の古典解である．インスタントンの存在は Minkowski 空間での**トンネル効果**を意味している．果たしてゲージ理論の場合，何がトンネルしているのだろうか．

その前に，量子力学でトンネル効果を WKB 近似を使って計算する方法を考えてみる．今，簡単のために 1 次元ポテンシャル $V(x)$ を考え，粒子が $x=0$ から $x=a$ までトンネルする確率（透過係数）を P とする．$V(x)$ は，図 1 が示すように，$x=0$ が極小値点で，かつ $V(0) = V(a) =$

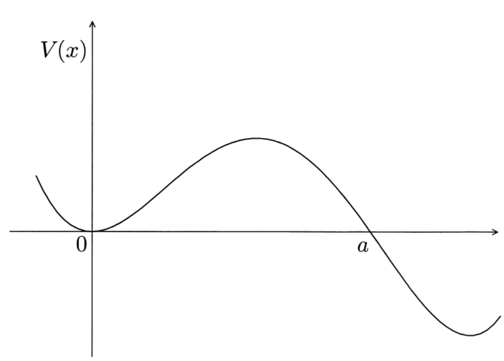


図 1　1 次元ポテンシャル $V(x)$．横軸は x．

$0, V'(a) < 0$ とし，領域 $0 < x < a$ で $V(x) > 0$ とする．WKB 近似によると（粒子のエネルギーがゼロ，粒子の質量が m の場合）

$$P \simeq \exp\left(-2\int_0^a (2mV(x))^{1/2}\right) \qquad (18)$$

となる．この結果がなぜインスタントンと関係があるかというと，次のように理解できる．Minkowski 空間のラグランジアンは $L = (1/2)m(dx/dt)^2 - V(x)$ である．次に，$t \to -i\tau$ とすると $L \to -L_E = -(1/2)m(dx/d\tau)^2 - V(x)$ となり，Euclid 空間での運動方程式は $md^2x/d\tau^2 - V' = 0$ となる．インスタントン解は，$\tau = -\infty$ で $x = 0$ から出発して a に到着し，$\tau = +\infty$ で $x = 0$ にも戻ってくる解になっている．Euclid 空間での作用は $S_E = \int d\tau L_E$ とすると，トンネルする確率 $P(18)$ の右側は $\exp -S_E[x_I]$ と書けることが確かめられる．

さて，本題のインスタントンに戻る．実は，アノマリーの関係式 (9) の右側の $\partial_\mu K^\mu$ は，それを Euclid 化された理論で全空間で積分すると $Q = \int d^4x \partial_\mu K^\mu$ となるが，これは Pontryagin 指数と呼ばれていて（Euclid 化された作用を有限にするゲージ場のすべての配位に対して）整数であることが知られている．さらには，Atiyah–Singer の指数定理によると，Q は Dirac 演算子の右巻きのゼロモードの数と左巻きのものの数の差になっている．(15) で定義された W と違って Q は大小のゲージ変換の下で不変である．そこで，Q を整数 ν とすると

$$\nu = \int d^3\boldsymbol{x} \left(\partial_i K^i|_{\tau=\infty} - \partial_i K^i|_{\tau=-\infty}\right) \quad (19)$$

となる．上の式は $A_0 = 0$ ゲージの下で Minkowski 空間で定義した巻き数の差 $\Delta n = n(\tau = \infty) - n(\tau = -\infty)$ になっていることが分かる．実際にインスタントン解 A_I を Q に入れると，$\nu \neq 0$ となっているので**巻き数で分類されたセクタ間の転移**が起こっていることになる．その転移確率はインスタントン近似を使うと $\exp(-S_E[A_I]) = \exp(-8\pi^2/g^2) \sim 10^{-86}$ と評価することができるが，実質的な意味がない．

ゲージ群が $U(1)$ の場合は，$\partial_\mu K^\mu \neq 0$ でも，$\int d^4x \partial_\mu K^\mu = 0$ となり，対応する巻き数はない．

4. バリオン数の破れ III—sphaleron

以上のことを踏まえて，もう一度アノマリーの式に戻ってみる．(9) の右側も全微分になっているので，電流を $\tilde{j^\mu_B} = j^\mu_B - 3K^\mu$, $\tilde{j^\mu_L} = j^\mu_L - 3K^\mu$ と再定義すると $\tilde{Q}_B = Q_B - 3W$ と $\tilde{Q}_L = Q_L - 3W$ はそれぞれ厳密に保存することになる．従って，真空のバリオン数とレプトン数をゼロとすると $\langle Q_B \rangle = 0$, $\langle Q_L \rangle = 0$ だから，ホモトピークラスに分類されたセクタの巻き数は保存されることになり真空内の異なった巻き数のセクタ間のトンネルが起こらなくなる．もちろん，B や L がゼロでない状態間の転移は起こり得る．つまり，B から 3× 巻き数を引いた数，L から 3× 巻き数を引いた数と $B - L$ が保存するようなトンネル効果が存在できる．しかしその確率は実質的には無視できるものであると結論したばかりである．

ところが，Higgs 場とゲージ場が結合した系で（$U(1)_Y$ ゲージ場は無視するが）**古典解 sphaleron** が存在する．そのエネルギー $E_{\rm sp}$（$T = 0$ のときのポテンシャルバリアの高さ）は（Higgs 場の自己相互作用の強さにも依存するが）約 10 TeV 位で（Minkowski 空間での鞍点に対応している）**不安定解**になっている．しかも (15) で定義された巻き数が 1/2 になっている．この解の存在は系のエネルギーが高くなると無視できなくなってくる．つまり，古典的にも，以下のようなゲージ場の運動が可能になる．$t << 0$ でゲージ場は運動エネルギーを持ち，その配位は巻き数 n のクラスに属していたとする．t が 0 に近づくにつれてゲージ場は次第に運動エネルギーを失い sphaleron の配位に近づく．その後，鞍点を乗り越え $t >> 0$ には巻き数 n' のクラスの配位になる．古典場でのレベルでは巻き数はバリオン数やレプトン数に関係ないが，量子場のレベルでは (9), (11), (19) のために密接に関係しているのである．sphaleron は，図 2 に示すような物理振子を使って直感的に理解

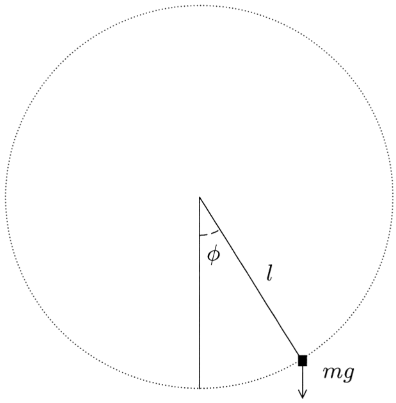


図 2 sphaleron は，片側が固定された長さ l の（伸び縮みしない）ひもにぶら下げられた質量 m の運動と似ている．$\phi = n\pi$ ($n = \pm$ 奇数) でポテンシャルエネルギー $mg(\cos\phi - 1)$ は最大値となっていて，$\phi(t) = n\pi$ ($n = \pm$ 奇数) は，運動方程式の時間 t に依存しない解だが，不安定な解である．質量の運動エネルギーが小さいときは，$\phi = 0$ のまわりで振動運動をしているが，$2lmg$ を超えると $|\phi| \geq \pi$ が可能になり回り始める．

できる．

もし，宇宙の開闢時，あるいはある時点（例えばインフレーションの直後）で $B = L = 0$ であったとすると，なぜどのような機構で反物質が消えしまったのかを説明しなければならない．sphaleron は $SU(2)_L$ が自発的に破れている相でしか存在しないが，破れていない相でもバリオン数を破るゲージ場の配位が存在する．膨張宇宙で，このようなバリオン数を破る反応が熱的平衡状態にあると，バリオン数を増やす反応と減らす反応が同時に起き，次第にバリオン数がゼロになっていく．従って，低温でバリオン数が有限になれるには，**熱的平衡状態からの脱出**が不可欠となる．標準理論は，約 100 GeV 以上のある温度で W ボゾンの質量がゼロから有限な相に転移する．この相転移が **1 次相転移**なら，熱的平衡状態から脱出する可能性があり，この時に生成されたバリオン数がそれ以下の温度でも存在する sphaleron 配位によって消されてしまわなければ，低温でも有限なバリオン数が残ることが期待できる（electroweak baryogenesis）．また逆に，高温で $L \neq 0$ なら，たとえ高温で $B = 0$ であっても $B - L$ がそれ以下の温度で厳密に保存していると低温で $B > 0$ になることができる．これが福来–柳田が提案したバリオン数生成の機構（baryogenesis via leptonenesis）の idea である．

バリオン数生成機構についてのさらに詳しい説明は，本特集の諸井氏の解説を読んで頂きたい．

5. おわりに

参考文献に引用した教科書には量子異常について様々な側面から取り扱っているので参考にして頂きたい．オリジナルな論文の引用は割愛させて頂いたが，これらの教科書に多くのオリジナルな論文が引用されているので，是非読んで頂きたい．

最後に，藤川和男氏と青木真由美氏には色々議論させて頂いて感謝いたします．

参考文献

1) 藤川和男,『ゲージ場の理論』, 岩波書店, 1993;『経路積分と対称性の量子的破れ』, 岩波書店, 2001.
2) R. Jackiw, "Topological Investigations of Quantized Gauge Theories", in "Relativity, groups and toplogy II", eds. B.S DeWitt and R. Stora, North-Holland, 1984.
3) 九後汰一郎,『ゲージ場の量子論 II』, 培風館, 1989.
4) S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields", Vol.II "Modern Applications", Cambridge University Press, 1996.
5) M. Fukugita and T. Yanagida, "Physics of Neutrinos and Application to Astrophysics", Springer-Verlag, 2003.
6) A.G. Cohen, D.B. Kaplan and A.E. Nelson, "Progress in electroweak baryogenesis," *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **43** (1993) 27.

（くぼ・じすけ，金沢大学理工研究域数物科学系）

超伝導における自発的対称性の破れ

南部先生の慧眼

上田 正仁

1. はじめに

超伝導現象がカメリン・オンネスにより発見されたのは1911年であるが，超伝導理論として今日広く受け入れられている**BCS理論**がバーディーン，クーパー，シュリーファー（Bardeen, Cooper, Schrieffer, BCS）により公表されたのは1957年である[1]．超伝導のメカニズムの解明に半世紀もの歳月を要したのは，超伝導が電子の対（クーパー対）を基本単位とした階層構造を形成しているという新しい物質観の創造が必要だったからだと思われる．

南部は誕生したばかりのBCS理論を当時まだ学生であったシュリーファーのセミナーで知り，非常に感激したという．同時にこの理論が仮定する奇妙な前提に疑問を持った．それは，BCS理論に現れるエネルギーギャップ関数が，粒子対を生成したり消滅したりする役割を果たすからである．このことは，BCS理論が電荷を保存せず，ゲージ不変性を破っていることを意味している．南部はこのときの印象を次のように語っている．「ですから，これはインチキではないかと思った．しかし，見事なBCS理論を捨てるのは非常に惜しい．ですから，私としては非常に困ったわけで，何か救い道がないか考えたわけですね」[2]．

ゲージ対称性をあらわに破ったBCS理論の著しい成功のために，超伝導の本質はゲージ対称性の破れであるとしばしばいわれるようになった．しかし，これは誤解を招く表現であると思う．なぜならば，超伝導がゲージ不変性に基づく量子電気力学の枠内で記述されるものである以上，ゲージ対称性の破れが超伝導の本質であっては超伝導理論そのものが「インチキ」になってしまうからである．2年におよぶ熟考の上で，南部はBCS理論を外場の1次のオーダーでゲージ不変にできることを明らかにした[3]．

南部のアイデアは，電子数の非保存を**自発的対称性の破れ**（Spontaneous Symmetry Breaking, **SSB**）として捉えるというものであった．このとき，理論がゲージ不変ならば対称性を回復する**南部・ゴールドストーン（NG）モード**が生じなければならない．事実，南部は，ファインマン・ダイソン流の場の理論の摂動展開に基づいて電流演算子に“輻射補正”（バーテックス補正）を加えることによりNGモードが自然に現れることを示し，さらに，“真空分極”の効果によりNGモードがエネルギーギャップを獲得することを明らかにした．このメカニズムはその後，素粒子物理学の分野に逆輸入され，質量生成の**ヒッグス機構**へと発展した．以下では，超伝導のBCS理論の概略とその困難，そしてそれが南部によりどのように解決されたかを述べる．

2. 超伝導のBCS理論

超伝導はミクロな量子力学的効果がマクロなレ

ベルに増幅された量子現象の典型例である．しかし，これをミクロなレベルから理解しようとすると直ちに困難に直面する．超伝導電流の担い手の電子はフェルミ粒子であるが，フェルミ粒子はパウリの排他原理に従い，一つの量子状態を2個以上の粒子が占有することはできない．ミクロな量子現象をマクロに増幅する基本的なメカニズムはボース・アインシュタイン凝縮（BEC）であるが，BECを起こす基本単位はボソンである．電子を2個くっつければボソンになるが，電子間には強いクーロン斥力が働くので，そんなことは一見すると問題外に思われる．ところが，まさにフェルミ統計がこの問題を解決する道を用意していたのである．

金属中の電子はフェルミ統計に従ってエネルギーの低い状態からフェルミエネルギーまで電子がぎっしりと詰まっており，絶対零度ではフェルミエネルギー以上の状態は空である．両者の境界はフェルミ面を構成する．クーパーはフェルミ面上で反対向きの運動量とスピンを持つ2個の電子の間に引力が働くとどんなことが起こるかという2体問題を考えた．結果は，フェルミエネルギー以下の状態が他の電子で埋まっているおかげで，引力がどんなに弱くても2個の電子は束縛状態を作るというものであった．このような電子対をクーパー対という．2電子が真空中におかれた場合は，引力相互作用の強さがある閾値を超えないと束縛状態が形成されないが，フェルミ面の存在のおかげで束縛状態ができる閾値が無限小になる．

クーパーの議論は2電子の背後にフェルミ球が存在するという巧妙なものであったが，一つ深刻な問題点があった．すなわち，束縛状態のエネルギーはフェルミ面よりも低くなければならないが，この結論はフェルミエネルギーまで電子がぎっしりと詰まっているという仮定と矛盾してしまう．また，束縛状態を作るという結論は，フェルミ面上にある反対向きの運動量とスピンを持つすべての電子対にあてはまる．BCSは，電子間に引力が働くフェルミ面近傍のすべての電子が全体として多体的な束縛状態を形成すると考えることでこの困難を克服した．この多体的な束縛状態にはすべての電子がセルフコンシステントに関与するので，BCS状態では1電子分布はエネルギーギャップ程度の幅で1から0へと滑らかに変化する．

通常の超伝導における引力の起源は電子格子相互作用である．金属中では，正に帯電したイオンが規則正しく結晶を作り，その中を伝導電子が動き回っている．正に帯電したイオンと負に帯電した電子の間には引力が働くため，電子が運動するとその周りにイオンが引き寄せられる．ところが，イオンは電子に比べてずっと重いためにゆっくりとしか移動できず，イオンが電子に引き寄せられたときにはもとの電子はいなくなってしまっている．その結果，その場所の近くは周りと比べて正に帯電した領域ができ，そこに他の電子が引きつけられる．こうして電子どうしはイオンの運動を媒介として，引力的な相関をもつことができる．これが電子格子相互作用により電子間に実効的な引力が働くメカニズムである．

様々な超伝導現象の起源はクーパー対の**非対角長距離秩序**（Off-Diagonal Long-Range Order, **ODLRO**）とマクロな波動関数の硬さ（rigidity）である．前者は超伝導全体を記述する秩序パラメータと呼ばれるマクロな波動関数の導入を可能にし，それが後者と組み合わさってマイスナー効果や超伝導電流を生じる．ODLROが生じると，クーパー対をある場所から遠くに離れた別の場所に移しても系の状態は変化しない[4]．そのようなことが可能なのは，マクロな数のクーパー対がある2粒子状態に凝縮しており，その状態が系全体にわたって広がっているからである．これはクーパー対がボース・アインシュタイン凝縮していることを意味している．このとき，マクロな波動関数$\Psi(\boldsymbol{r})$が導入できる．系の状態を変えることなくクーパー対が長距離を移動できるということは，この系が超流動性を持ち得ることを示唆している．しかし，そのような超流動が安定に流れるためには，少々の摂動が加わっても系の状態が変化しない必要がある．このことを保証するものが波動関数の硬さである．これは基底状態がエネルギーギャップを

持つことで満足される．

BCS が仮定した超電導状態を記述する波動関数

$$|\mathrm{BCS}\rangle = \prod_k \left(u_k + v_k e^{i\theta} \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} \hat{c}^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \right) |0\rangle \quad (1)$$

は上記の 2 条件を満足している．ここで，$u_k^2+v_k^2=1$，$\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow(\downarrow)}$ は波数が $\boldsymbol{k}$ でスピンが上（下）向きの電子を生成する演算子，$|0\rangle$ は電子が存在しない真空状態である．位相因子 $e^{i\theta}$ は BCS 波動関数の位相である．右辺はクーパー対が存在しない状態（確率振幅は u_k）と存在する状態（確率振幅は v_k）の重ね合わせの状態の積になっており，BCS 状態における全系の粒子数は確定していない．しかし，系の全粒子数が確定した状態は (1) をフーリエ変換して

$$|N\rangle = \int_0^{2\pi} d\theta e^{-iN\theta/2} |\mathrm{BCS}\rangle \quad (2)$$

のように構成できる．このようにして，BCS 波動関数からはグローバルな $U(1)$ ゲージ対称性を回復することはできる．しかし，BCS 状態はローカルなゲージ対称性も破っている．南部が取り組んだのはこの問題である．

3. 超伝導の南部理論

物理量は，電磁ポテンシャルをゲージ変換しても不変である．これは，電荷が局所的に保存されていることを保証する連続の方程式が成立することと等価である．BCS 理論は電磁場の横波成分に対してはゲージ不変であるが，縦波成分に対してはそうではない．したがって，マイスナー効果など横波の応答については正しい答えを与えるが，プラズマ振動のような縦波成分に対してはゲージの取り方に依存した非物理的な応答を与える[5)]．南部はこの問題を，ファインマン・ダイソン流の場の理論の枠組みを超伝導理論に適用することで BCS 理論のどこが問題であるのかを指摘し，それを自然に解決する方法を明らかにした．詳細は原論文[3)]や教科書[5)]に譲り，ここでは要点のみ述べる．

ファインマン・ダイソンによる場の理論の摂動論は，摂動の各次数ごとに自己エネルギー補正とバーテックス補正をウォード恒等式を満足するように正しく取り入れることによって，各次数の近似の範囲内で理論をゲージ不変にすることができる．南部は，超伝導理論をこの場の理論の形式で記述できるような表示法（**南部表示**）を考案し，それを用いて BCS 理論の分析を行った．ここで，南部表示とは，グリーン関数を以下で述べる 2 種類の平均場とその複素共役を行列要素とする 2 行 2 列の行列で置き換える表示であり，超伝導のように粒子対の平均場が重要な役割を果たす状況でのダイアグラム計算を見通し良く行うことを可能にする．

BCS 理論は，2 種類の平均場 $\langle \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}_1\sigma_1} \hat{c}_{\boldsymbol{k}_2\sigma_2} \rangle$ と $\langle \hat{c}_{\boldsymbol{k}_1\sigma_1} \hat{c}_{\boldsymbol{k}_2\sigma_2} \rangle$（$\boldsymbol{k}$ は波数，σ はスピン）に関するハートリー・フォック理論である．電子は周りの電子との相互作用の影響を受けて自己エネルギーを獲得するが，このとき，電流の表式には対応するバーテックス補正が必要になる．南部はこれが量子電気力学における輻射補正に対応することを指摘し，それを考慮することで**ウォード恒等式**が満たされ，理論を外場の 1 次のオーダーでゲージ不変にできることを示した．

南部はさらに，バーテックス部分が満足する積分方程式の解に，長波長極限でエネルギーがゼロとなる縦波の集団モード（ボゴリウボフモード）が自然に現れることを示した．このモードは，SSB が起こったときにそれを回復しようとするモードである NG モードであると解釈できる．こうして，BCS 理論におけるゲージ対称性の破れが SSB として自然に解釈できることが明らかになった．ボゴリウボフモードは，凝縮したクーパー対が作るセルフコンシステントな場が復元力となったゼロ音波である．バーテックス部分の積分方程式は，クーパー対の場がセルフコンシステントであるための条件を与えている．

クーロン相互作用が存在する場合，長波長のモードでは場の理論で真空分極に対応するクーロン遮蔽の効果が主要な役割をする．したがって，この効果を記述するダイアグラム（RPA ダイアグラ

ム）をバーテックス補正に加える必要がある．この項を加えても，ウォード恒等式が満足されることが示される．その結果，上のボゴリウボフモードは励起ギャップを持ったプラズマモード（アンダーソンプラズモン）となる．ここで，プラズマ振動する物質場はクーパー対の波動関数，この集団モードが結合する相手はゲージ場（電磁場）の縦波成分である．これは，ゲージ場の縦波成分が物質場の NG モードと結合することによって，ゲージ場が質量（エネルギーギャップ）を獲得したと解釈することができる．このとき，電磁場の横波成分も同時に質量を獲得することが示され，それがマイスナー効果を生む．

4. 超伝導のギンツブルク・ランダウ理論

南部は外場に対する電流の応答関数をファインマンダイアグラムと行列形式のグリーン関数を用いて計算したが，その物理的帰結は有効理論であるギンツブルグ・ランダウ理論を用いることにより比較的容易に理解することができる．

超伝導の秩序変数（“クーパー対の波動関数”）を Ψ とすると，電磁場が存在する場合の系のラグランジアンは次のように書ける．

$$\mathcal{L} = [(\partial^\mu + 2ieA^\mu)\Psi]^*(\partial_\mu + 2ieA_\mu)\Psi - C|\Psi|^2 - \frac{n}{2}|\Psi|^4 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (3)$$

ここで，C は温度 T に依存し，超伝導転移温度 T_c を境にして $C = a(T - T_\mathrm{c})$ のように符号を変える（a は正の定数）．また，$4m = \hbar = 1$ と置いた（m は電子の質量，n は電子数密度）．

物質場 Ψ^* についてのラグランジュ方程式はローレンツゲージ $(\partial^\mu A_\mu = 0)$ をとると

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Psi^*)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^*} = (\partial^\mu + 2ieA^\mu)(\partial_\mu + 2ieA_\mu)\Psi + C\Psi + n|\Psi|^2\Psi = 0. \quad (4)$$

他方，ゲージ場 A_ν に対するラグランジュ方程式は

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A_\nu)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 2ie\Psi^*(\partial_\nu + 2ieA_\nu)\Psi - ie\Psi(\partial_\nu - 2ieA_\nu)\Psi^* + \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (5)$$

ここで $C>0$ の場合の平均場解は $\Psi^0=0$, $A^0_\mu=0$ であり，そこからの物質場と電磁場のゆらぎ ϕ と a_μ は方程式

$$(\partial^\mu\partial_\mu + C)\phi = 0, \quad (6)$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (7)$$

に従う．物質場は複素場なので 2 つのモードからなり，(6) からこれらはいずれもエネルギーギャップを持つことが分かる．他方，(7) からゲージ場は massless であり，ゲージ変換の自由度を利用して電磁ポテンシャルの時間成分をゼロとすることができるので，残りの自由度は $4 - 1 - 1 = 2$ であることがわかる．

次に，$C < 0$ の場合を考えよう．このとき，平均場解は $\Psi^0 = \sqrt{-C/n}$, $A_\mu = 0$ であり，ゆらぎを含めた平均場を $\Psi = e^{i\xi}(\Psi_0 + \eta)$, $A_\mu = a_\mu$ とおく．これらを (4), (5) に代入してゆらぎについて 1 次まで残すと

$$i\partial^\mu(\partial_\mu\xi + 2ea_\mu) + (\partial^\mu\partial_\mu + 2|C|)\eta = 0, \quad (8)$$

$$\frac{2|C|e}{n}(\partial_\nu\xi + 2ea_\nu) + \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (9)$$

が得られる．ここで，ゲージ変換 $a_\mu \to a_\mu - (1/2e)\partial_\mu\xi$ を行った上で，ゲージを $\partial^\mu a_\mu = 0$ となるように固定すると，(8) (9) はそれぞれ次のようになる．

$$(\partial^\mu\partial_\mu + 2|C|)\eta = 0, \quad (10)$$

$$(\partial^\mu\partial_\mu + 4|C|e^2/n)a_\nu = 0. \quad (11)$$

(10) を (6) と比較すると対称性が破れる前には 2 成分あった物質場の自由度が振幅ゆらぎの 1 成分になっていることが分かる．他方，ゲージ場の自由度は，(7) では massless な横波が 2 成分であったものが，(11) では縦波も含めて 3 成分となっている．すなわち物質場の位相の自由度がゲージ場の縦波成分に転化している．その結果，ゲージ場は

表1　超伝導理論とヒッグス機構の対応.

超伝導	ヒッグス機構
エネルギーギャップ	質量
ボゴリウボフモード	南部・ゴールドストーンモード
クーパー対場	ヒッグス場

すべて massive になっていることに注意しよう．このうち，横波2成分がマイスナー効果を引き起こし，縦波成分がアンダーソンプラズモン（ヒッグス場）となっている．

本来 massless なゲージ場が SSB により質量を獲得するメカニズムはヒッグス機構と呼ばれる．ここで述べた超伝導の南部理論は，素粒子のヒッグス機構へと発展した（表1）．こうして BCS 理論におけるゲージ不変性の問題は，超伝導を場の理論の枠組みで議論するという南部先生の慧眼により見事に解決された．

謝辞

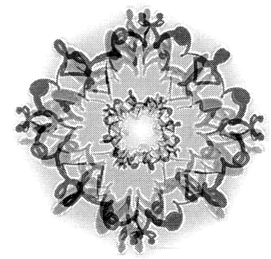
有益なコメントをいただきました初田哲男氏に感謝します．

参考文献

1) J. Bardeen, L. Cooper, and R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
2) 南部陽一郎「自然法則の対称性とその破れ」仁科記念財団，Publication No.50 (2010).
3) Y. Nambu, *Phys. Rev.* **117**, 648 (1960).
4) 上田正仁『現代量子物理学—基礎と応用』（培風館，2004）．
5) J.R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity* (Westview Press, 1990).

（うえだ・まさひと，東京大学大学院理学系研究科）

量子色力学におけるカイラル対称性の破れ



大野木 哲也

1. はじめに

「π 中間子」とはどんな粒子かご存知でしょうか？ この粒子は湯川秀樹博士によって存在が予言されたのちに南部陽一郎博士によって深い意味の発見がなされた，いわば「二度発見された」粒子です．しかもそれぞれの発見が素粒子論における新しい革命的概念をもたらしました．本稿ではこのように素粒子論において特別な意味を持つ π 中間子のダイナミクスを，クォークなどの素粒子を記述する理論である量子色力学（Quantum ChromoDynamics = QCD）からあらためて考察した研究*1) の紹介をしたいと思います．

π 中間子は湯川博士によって核子間の引力を媒介する粒子として導入されました．核子の散乱データから得られた核力ポテンシャルを相対論的な場の理論で記述するためには到達距離の逆数に比例する質量をもつ新粒子が必要であるという理論的な発見が革命をもたらし，新しい相互作用に新しい粒子（場）を導入する素粒子論の基本的スタイルが確立しました．

次に π 中間子は南部博士によって，核力を含む素粒子の強い相互作用における（近似的な）**カイラル対称性***2) の破れに伴う（近似的に）質量ゼロの粒子として再発見されました．2008年のノーベル物理学賞で記憶されている方も多いと思います．南部博士は π 中間子が他の強い相互作用をする粒子と比べて非常に軽いのはなぜかという疑問から出発し，対称性の破れと南部・ゴールドストーン粒子と呼ばれる質量ゼロの粒子の出現する機構を発見しました．さらに π 中間子の相互作用はダイナミクスの詳細によらず対称性だけで支配される関係式を満たすという**低エネルギー定理***3) を

---

*1) この研究は JLQCD Collaboration との共同研究に基づく．入門的なレビューとしては文献 1) がよい．

*2) カイラル対称性とはスピンを持つ粒子の右巻きと左巻きを区別する対称性のことである．右巻きの粒子が飛んでいるとき，その粒子よりも速く飛んで追い越すと左巻きに見える．このことは，この粒子が本来，右巻きか左巻きかを区別することができないことを意味している．しかし，粒子の質量がゼロで光速で飛んでいれば，光速よりも速く飛んでこの粒子を追い越すことはできないので，スピンの向きはその粒子の持つ固有の性質とみなせる．

*3) 力学系に対称性があると真空が自発的に対称性を破った場合でも，作用自体は対称性を保っているので低エネルギー極限における散乱振幅はダイナミクスの詳細によらず対称性のみから（ダイナミクスに依存する定数を除いて）決定される．これを低エネルギー定理という．カイラル対称性の保存カレントは南部・ゴールドストーン粒子である π 中間子と結合し，同時に β 崩壊などの弱い相互作用にも関係する．従って π 中間子の散乱振幅や β 崩壊に関する低エネルギー現象に対称性に基づく関係式が成り立つことが予言される．最も顕著な例が Goldberger–Treiman 関係式

$$g_{\pi NN} = 2m_N g_A(q^2=0)/f_\pi$$

である．m_N は核子の質量，$g_{\pi NN}$ は π 中間子と核子の結合定数，g_A, f_π はそれぞれ核子と π 中間子の β 崩壊に関する定数で，実験による観測値を代入すると上記の関係式は10%の誤差程度で成り立っている．カイラル対称性がクォーク質量のため破れていることを考慮するとこれは妥当なずれである．この他に核子と π 中間子の散乱振幅についても実験データと低エネルギー定理の予言がよく一致していることが知られている．

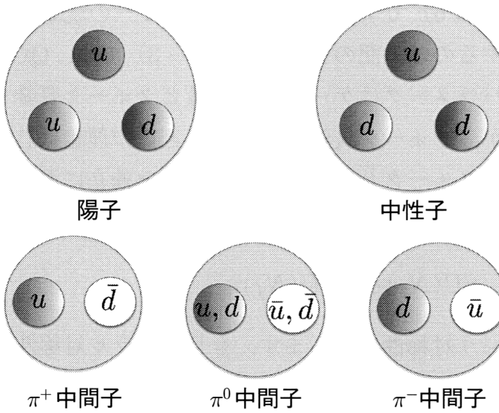


図 1　QCD から見た核子と中間子.

表 1　グルオンとアップ・ダウンクォーク.

粒子	スピン	電荷
グルーオン (g)	1	0
アップクォーク (u)	1/2	2/3
ダウンクォーク (d)	1/2	−1/3

導き，実験値をうまく説明することを示しました．この発見により，核子や中間子の背後に隠された対称性からより基本的な素粒子であるクォークの発見につながり，対称性の破れのアイディアから標準模型や大統一理論などの発展が生まれました．

1960 年代に入って核子の散乱実験において核子と中間子に加えて多くの共鳴状態（ハドロン）が発見されたため湯川理論は大きな修正を迫られ，場の理論そのもの信頼も失われかけました．しかし，多くの目覚ましい実験と理論的進展をへてハドロンはクォークとグルーオンを基本構成要素とする QCD によって記述される複合粒子状態であることが明らかになりました（図 1，表 1）．

あらためて QCD の観点から見ると，陽子は (uud)，中性子は (udd) という 3 つのクォークの複合状態であり，湯川中間子は π 中間子と呼ばれる 3 種類の粒子で π^+ 中間子，$(u\bar{d})\pi^0$ 中間子，$(u\bar{u})\pi^+$ 中間子 $(d\bar{u})$ からなるクォークと反クォークの複合状態です．

カイラル対称性の自発的破れのアイディアは 1960 年代に提唱され，QCD は 1970 年代に確立しました．従って QCD におけるカイラル対称性の破れはすでに完全に理解されていると思いがちですが，必ずしもそうではありません．注目すべきは湯川博士も南部博士も実験事実を注意深く観察し深い洞察をもってミクロな理論の詳細によらない普遍的な構造を発見したという点です．一方でミクロな理論からあらためて実験で知られている現象が起こることを実証することはそれとは別の問題で，実は本稿の主題である第一原理からの理論的検証がなされたのはごく最近のことです．

2. カイラル対称性の破れの理論的検証の目的

さて，南部理論が提唱されたときから実験的サポートのあった強い相互作用におけるカイラル対称性の破れを，あらためて QCD の第一原理から検証する目的は何でしょうか？

1 つ目は QCD の第一原理から本当にカイラル対称性の破れが起こるのかという原理的な問題に対して答えるという目的です．南部博士は超伝導における電子のペア（クーパー対）の凝縮をヒントに強い相互作用におけるカイラル対称性の破れを考察しました．超伝導の場合は電子が有限密度であるのに対し QCD の真空の場合はクォークの密度はゼロのため若干状況が異なっています．おそらく QCD の相互作用が長距離で強結合になることが対称性の破れの原因の一つであると考えられますが，逆にいうと本質的に非摂動的な現象であることを意味します．従って，非摂動的な効果を正しく取り扱える理論的手法を用いてカイラル対称性の破れを実証することは理論的な課題です．

2 つ目は標準模型やそれを超える新しい物理の精密検証からの要求に答えるという目的です．日本および世界で K 中間子や B 中間子の崩壊過程の分岐比の測定実験により小林・益川理論の検証がなされました．さらに精度を上げて標準模型を超える物理を探るために次世代の実験も計画されています．複合粒子である中間子の崩壊からクォークの相互作用を決定し，理論の検証を行うことは一種の逆問題ですが，測定の実験精度の目覚ましい向上に伴って中間子の崩壊の遷移行列の決定に

高い精度が要求されるようになってきました．精度の高い計算のためには第一原理計算とカイラル対称性に基づく理論的な関係式を組み合わせた解析が非常に有効です．そのためにまずカイラル対称性の自発的破れを QCD の第一原理計算にから再現することが出発点になります．

3 つ目は標準模型を超える物理として，直接に新しいエネルギースケールでの新たな対称性の破れを検証するための理論的手法を磨くという目的です．素粒子論において高いエネルギースケールで新たな対称性が自発的に破れるという模型は数多くあります．例えば，素粒子物理学の最大のターゲットの一つは，β 崩壊を媒介するウィークボゾンがなぜ質量を獲得するかという電弱対称性の破れの機構の解明です．南部博士によって超伝導からの類推でゲージ相互作用するヒッグス場の凝縮によって自発的にゲージ対称性を破れる機構が提唱され標準模型の基礎となりましたが，ヒッグス場の凝縮はスカラー粒子によって起こるのか，複合粒子によって起こるのか，といったダイナミクスの詳細は未解明です．この他の例として，超対称性と呼ばれるボゾンとフェルミオンを入れ替える対称性が大統一理論や暗黒物質と自然に両立する理論の枠組みを与えるものとして有望視されています．これらの対称性の破れを担うダイナミクスを実験とともに理論の第一原理から理解することは，今後重要になると期待されます．

3. QCD のダイナミクスとカイラル対称性

クォークとグルーオンの運動は，電子とフォトンの運動を支配する「量子電磁気学（Quantum ElectroDynamics ＝ QED）」とよく似ており，「QCD」と呼ばれるゲージ場の理論で記述されます．この理論は厳密な「$SU(3)$ ゲージ対称性」とクォーク質量による破れを伴う近似的な「カイラル対称性」をもつ極めて単純で美しい構造を持ちます．クォークはアップ，ダウン，ストレンジなどいくつかの種類があります．異なる種類の数を N_f とおくと，現実世界のクォークは全部で 6 種類（$N_f = 6$）ですが，主に低エネルギーの現象に寄与するのは上記の 3 種類（$N_f = 3$）です．QCD のパラメータはゲージ結合定数とクォーク質量ですが，クォーク質量がゼロのときこの理論は右巻きのクォークと左巻きのクォークを独立に混合させる

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$$

という対称性を持ちます．もしカイラル対称性が自発的に破れるとすると，南部・ゴールドストーンの定理によれば質量ゼロの擬スカラー粒子が現れます．それ以外の粒子は QCD の典型的なエネルギースケールを持ち十分に重いとすると，それらを積分すれば南部・ゴールドストーン粒子だけの有効理論（**カイラル有効理論**）が得られます．小さなクォークの質量がある場合にも拡張が可能です．有効ラグランジアンは運動量と質量のベキで系統的に展開でき，ベキ展開の各オーダーではカイラル対称性によって支配される有限個の項で記述されます．

$$L_{\mathrm{eff}} = \frac{F^2}{4}\mathrm{Tr}[\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U] - \frac{\Sigma}{2}\mathrm{Tr}[mU + mU^\dagger] + \cdots .$$

ここで $U(x) = \exp(2i\pi(x)/F)$ は π 中間子の場 $\pi(x)$ から作られる N_f 行 N_f 列のユニタリー行列です．ラグランジアンの各項の係数を低エネルギー定数と呼びます．低エネルギー定数はミクロな基礎理論である QCD のダイナミクスによって決まっています．QCD の第一原理計算が実行できれば，低エネルギーの現象が本当にカイラル有効理論で記述できるかが検証でき，かつ同時に低エネルギー定数も予言できます．

4. カイラル対称性の破れの判定条件：Banks–Casher 関係式

カイラル対称性の破れを特徴づける秩序パラメータはカイラル凝縮

$$\langle \bar{q} q \rangle$$

ですが，これはクォーク伝搬関数の同時空点での

期待値に比例するためディラック演算子と呼ばれるゲージ不変なクォークの運動エネルギーを表す演算子の固有値 λ_k のスペクトル関数

$$\rho(\lambda) \equiv \frac{1}{V}\left\langle \sum_k \delta(\lambda - \lambda_k) \right\rangle$$

を用いたスペクトル表示が可能です．特に質量ゼロのときには

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\pi\rho(0)$$

で与えられることがBanksとCasherによって示されました．これを**Banks–Casher関係式**と呼びます．従って，この関係式が実際に成り立つことがQCDにおいて直接に確かめられれば，カイラル対称性の自発的破れの第一原理からの検証が可能となります．

5. 非摂動的計算手法：格子QCD

理論が単純であることはそこから導き出される現象が単純であることを意味しません．QCDは電磁気学と異なりゲージ対称性が $SU(3)$ という非可換なリー代数のためゲージ場の相互作用に非線形な相互作用項が現れます．そのため重ね合わせの原理は成り立ちません．非線形効果により短距離では相互作用が小さくなるため，摂動展開による解析的な近似計算が可能になり，理論と実験の精密な比較を通じた検証がなされ，今ではQCDの正当性を疑う人はいません．しかし，逆に長距離になるにつれ相互作用が大きくなるため真空の構造ですら非自明です．実際，QCDからグルオンの自由度だけを取り出した「ヤン・ミルズ理論の量子論」はミレニアム問題の一つで，今のところ有用な解析的手法は見つかっていません．

現在，非摂動的な現象を理論的に調べる上で最も有望なのが**格子QCD**と呼ばれる定式化に基づいた数値計算法です．格子QCDはQCDを4次元の格子上に定義した理論（図2）で，自由度の数が有限になるので計算機によるシミュレーションによって陽子や中性子の質量を初めとする多くの物理量を計算することが可能になってきています．

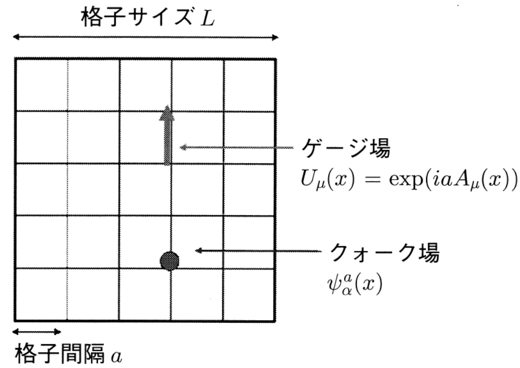


図2　格子上で定義されたQCD.

具体的な数値計算の詳細は省略しますが，モンテカルロ法を用いた経路積分を行います．カイラル凝縮は分配関数のlogのクォーク質量による微分で与えられますが，これは磁性体において自発磁化が自由エネルギーの外部磁場による微分で与えられるのと似た状況です．

$$\langle \bar{q}_i q_i \rangle = -\frac{\partial}{\partial m_i}\log Z.$$

ちなみに，もしQCDの低エネルギー有効理論が正しいならQCDと同じクォーク質量依存性をもつ分配関数を与えるはずなので，上の式においてQCDの分配関数をカイラル有効理論の分配関数で置き換えても同じ結果が得られることが期待されます．

6. 格子計算における困難

6.1 格子上のカイラル対称性の困難とオーバラップ・フェルミオンによる解決

ところが，従来の格子QCDの計算手法では，カイラル対称性を格子上に実現できないという理論的な問題がありました．ニールセンと二宮[2)]によって，1) エルミート性，2) 並進不変性，3) カイラル対称性 4) 局所性を保つ格子上のフェルミオンのディラック演算子は必ず複数個の零点を持つ，ということが証明されました．1998年にノイバーガーが提案したオーバーラップ・フェルミオンは，この問題を理論的には完全に解決するもので，厳

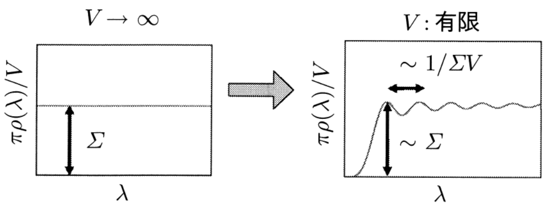


図 3　ディラック演算子の固有値分布と有限体積補正．

密なカイラル対称性をもちます．ただし，必要な計算量が通常の 100 倍以上になるために，シミュレーションへの本格的な応用はなかなか進みませんでした．

6.2 有限体積の困難とその解決

実際の格子 QCD 計算においては，体積は有限であるためカイラル対称性の破れは質量ゼロの極限では起こりません．そのためディラック演算子の固有値分布 $\rho(\lambda)$ は $\lambda = 0$ でゼロとなります．

一般的には十分体積が大きくかつ十分クォーク質量が小さければ図 3 にあるような形でディラック演算子の固有値分布のスペクトル関数が変形されると期待されます．Verbaarschot らは，ディラック演算子の最低固有値付近の振舞いは対しインスタントンガス模型などのように極めてランダムなゲージ場の配位に支配されているはずという物理的考察から，有限体積効果に伴うスペクトル関数の変形の様子に対する理論的予想を与えました．それによると変形は体積 V の逆数程度で，V が無限大に近づく極限で固有値分布は対称性で支配される以外は完全にランダム分布となり，同じユニバーサリティークラスに属する**カイラルランダム行列理論（ChRMT）**で記述できると予想しました．

7. 数値計算によるカイラル対称性の破れの実証

筆者を含む格子 QCD の共同研究グループ JLQCD collaboration は，高エネルギー加速器研究機構（KEK）のスーパーコンピュータ（図 4[7]）と計算アルゴリズムの改善によってこれまで数値

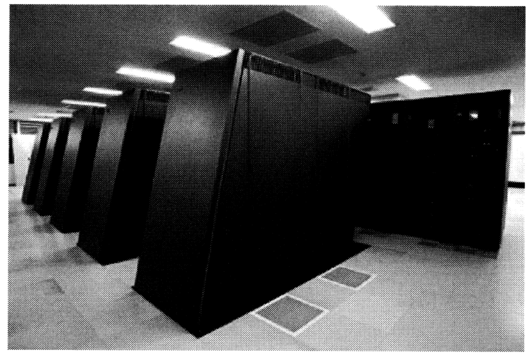


図 4　KEK スーパーコンピュータ IBM Blue Gene Solution（高エネルギー加速器研究機構計算科学センターより許可を得て掲載）．

計算が難しいと思われていたオーバーラップフェルミオン作用を用いてこれまでは不可能だったゼロに近い質量のクォークを含むシミュレーションを実行し，有限体積での QCD のディラック演算子の固有値スペクトルを計算しました[3]．結果はカイラルランダム行列の予言をよく再現しており，QCD が自発的カイラル対称性の破れを引き起こすことを示しました．

この研究は，QCD の第一原理からのカイラル対称性の破れの検証という意味で先駆的でしたがいくつかの点で不満が残りました．まず固有値分布の有限体積での振舞いが，体積が無限大に近づくにつれ漸近的にカイラルランダム行列で記述されるとしても，$1/V$ の高次の補正がどのように現れるか全く予言できません．ところが実際の格子 QCD のデータはカイラルランダム行列模型からのずれを示しています．このずれを理解するためには，やはりより一般的なカイラル有効理論からの理解が必要となりました．

8. より精密な検証

8.1 一般化された Banks–Casher 関係式

では，どのようにすればカイラル有効理論と有限体積でのディラック演算子の固有値分布との直接的に結びつけられるでしょうか．そのための大きなヒントは Smilga–Stern および Osborn–Toublan–Verbaarschot によって，与えられた以下の式のよ

うな Banks–Casher 関係式の一般化です[4]．有限体積で任意の固有値 λ における固有値スペクトルの値は単純な代数計算によりある仮想的なクォークのカイラル凝縮の差で表されます．

$$\rho_{m,V}(\lambda) \equiv \frac{1}{V}\left\langle \sum_k \delta(\lambda-\lambda_k)\right\rangle$$
$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\langle \bar{q}_v q_v\rangle|_{m_v=-i\lambda-\epsilon} - \langle \bar{q}_v q_v\rangle|_{m_v=-i\lambda+\epsilon}\right]$$

ここで q_v は valence クォークと呼ばれ，QCD の物理的なクォークとは別に，固有値分布を測定するためにプローブとして単に数学的に導入され，分配関数には寄与しない非物理的なクォークです．その質量は今の場合 $-i\lambda\pm\epsilon$ と選んでいます．本稿ではこの関係式を便宜上，一般化された Banks–Casher 関係式と呼ぶことにしましょう．V 無限大の極限を取ったのちに，物理的なクォーク質量および λ をゼロの極限を取ると従来の Banks–Casher 関係式が得られます．左辺は格子 QCD により非摂動的に直接計算できるので，もし右辺を低エネルギー有効理論で低エネルギー定数をパラメータとして評価できれば，カイラル対称性の破れの検証と低エネルギー定数の決定が可能になります．

8.2 格子 QCD とカイラル摂動論との比較

Damgaard–深谷は上記の一般化された Banks–Casher 関係式の右辺をカイラル有効理論を用いて低エネルギー定数の関数として決定しました[5]．彼らの結果は摂動の最低次ではカイラルランダム行列模型による予言を再現し，そこからの 1 次数補正もクォーク質量とカイラル有効理論の低エネルギー定数で表されます．

JLQCD Collaboration はアップ，ダウン，ストレンジクォークのある 3 フレーバー格子計算を行い，一般化された Banks–Casher 関係式の検証を行いました[6]．格子間隔 $a = 0.11$fm で体積は $16^3\times 48$ と $24^3\times 48$ の格子上で，ストレンジクォーク質量はほぼ現実の値，アップ・ダウンクォーク質量として数 MeV（メガ電子ボルト）から 100 MeV までの複数点についてゲージ場のシミュレーションを行っています．図 5 は 2 番目に

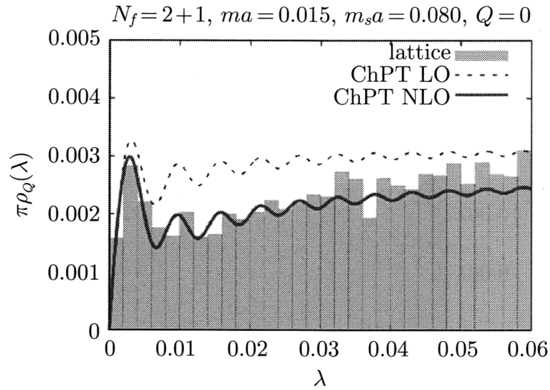


図 5　ディラック演算子の固有値スペクトルとカイラル有効理論との比較．

軽いアップ・ダウンクォークの場合の 3 フレーバー格子 QCD 計算に基づいてゲージ場のインスタントン数がゼロの場合の質量ゼロのディラック演算子の固有値分布と Damgaard–深谷によるカイラル有効理論を用いた結果との比較を行ったものです．ここで固有値は格子間隔を基準に測った無次元量でプロットしてあります．カイラル有効理論は低エネルギー定数を自由なパラメータとして含むので，分配関数の微分からディラック演算子の固有値スペクトルはクォーク質量 m_i と固有値 λ，体積 V と低エネルギー定数 Σ, F, L_6 などを用いて表されます．詳細な表式は文献 5) を参照してください．有効理論の展開パラメータに関する摂動計算の最低次（Leading Order = LO）は π 中間子の運動量ゼロの揺らぎの寄与が支配的で，ユニタリー行列模型の積分で得られるが，低エネルギー定数のうち Σ だけが寄与し，ChRMT の結果を再現します．展開の次の次数（Next Leading Order = NLO）は運動量がゼロでない π 中間子のループ補正が寄与し，低エネルギー定数 F, L_6 に依存します．これは，カイラルランダム行列模型では得られなかった有限体積，有限質量，有限エネルギーの補正です．

図 5 でヒストグラムが格子 QCD 計算によるディラック演算子の固有値スペクトルのデータ，実線が有効理論の摂動展開の LO + NLO の結果です．ここで低エネルギー定数 Σ, F, L_6 は格子

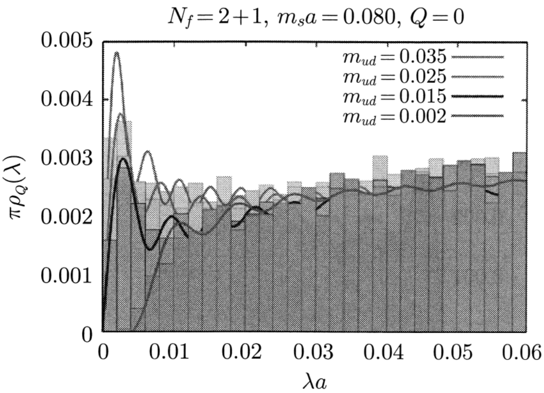


図 6　固有値スペクトルのクォーク質量依存性.

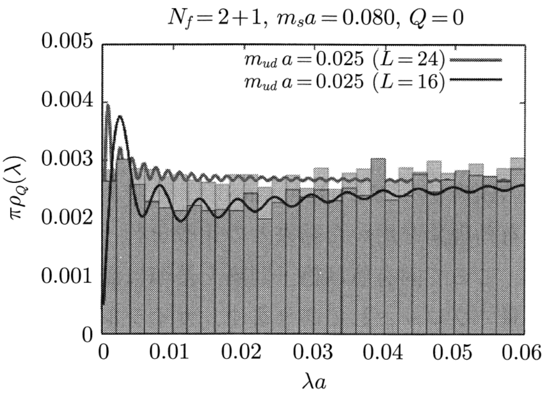


図 7　固有値スペクトルの体積依存性.

QCD のデータを使ってフィットした値を用いています. 点線は同じフィットで, LO のみの寄与を表しています. 図 5 から分かるように NLO までの寄与を含めると格子 QCD 計算のデータと有効理論は非常によく一致します.

さらに全く同じ有効理論の低エネルギー定数のフィット値を用いて異なるクォーク質量やより大きな体積で格子 QCD 計算を行った結果との比較を行ったのが図 6 と図 7 です. それぞれ有効理論との一致は非常によく, 有効理論の予言するクォーク質量依存性や体積依存性が見事に再現されていることが分かります.

以上, 見てきたようにカイラル有効理論の 3 つの低エネルギー定数を調節することによって, QCD のディラック演算子の固有値スペクトルの低エネルギー領域での λ 依存性, クォーク質量依存性, 体積依存性がカイラル有効理論の NLO までの近似ですべて同時に再現されました. 特に体積依存性についてカイラル有効理論の予言通り, 体積無限大の極限に向かってディラック演算子の固有値スペクトルが固有値ゼロ付近に集積していく様子まで再現できたことでカイラル対称性の自発的破れの QCD の第一原理からの定量的な検証がなされました. また副産物として, カイラル有効理論の低エネルギー定数も以下のように決定ができました.

$$\Sigma^{1/3} = [242(4)(^{+19}_{-18})\,\mathrm{MeV}]^3,$$
$$F = 74(1)(8)\,\mathrm{MeV},$$
$$L_6^r = -0.0001(3)(1).$$

カイラル凝縮パラメータ Σ は π 中間子スペクトルや位相感受率などによる独立な物理量からの決定値と一致しています. π 中間子の崩壊定数 F も実験値とかイラル有効理論を組み合わせて得られる現象論的な値と無矛盾です.

9. まとめ

本稿では格子 QCD の理論的進展と数値計算アルゴリズムや計算機の進展によって, 近年なされた強い相互作用におけるカイラル対称性の自発的破れについて QCD の第一原理からの検証を紹介しました. 判定条件である無限体積で低エネルギー極限での Banks–Casher 関係式そのものを直接検証するのでなく, 一般化された Banks–Casher 関係式をもとに有限体積, 有限クォーク質量, 有限エネルギーで有効理論と格子 QCD の結果を比較し, 無限体積の極限に向かってのスケーリングも含めて両者が完全に一致することを確認することによって検証が可能となりました.

実験データに直接関わる無限体積での物理量を直接に第一原理から再現するのではなく, 有限体積での有効理論とのマッチングを通じて物理量を求めるという方法は, ハドロンの遷移行列の高精度計算にも適用可能です. 格子理論の非摂動計算

により今後様々なダイナミクスにおける対称性の破れの研究が今後広がっていくことを期待しています．

参考文献

1) 橋本省二,『質量はどのように生まれるのか』(講談社, ブルーバックス, 2010).
2) Nielsen and Ninomiya, *Nucl. Phys. B* 185 (1981) 20.
3) JLQCD Collaboration (H. Fukaya *et al.*). *Phys. Rev. Lett.* 98:172001, 2007. e-Print: hep-lat/0702003: JLQCD collaboration (H. Fukaya *et al.*). *Phys. Rev. D* 77:074503, 2008. e-Print: arXiv:0711.4965 [hep-lat].
4) A.V. Smilga, J. Stern, *Phys. Lett. B* 318:531–536, 1993; J.C. Osborn, D. Toublan, J.J.M. Verbaarschot, *Nucl. Phys. B* 540:317–344, 1999. e-Print: hep-th/9806110.
5) P.H. Damgaard, Hidenori Fukaya, *JHEP* 0901:052, 2009. e-Print: arXiv:0812.2797 [hep-lat].
6) JLQCD collaboration (H. Fukaya *et al.*). *Phys. Rev. Lett.* 104:122002, 2010. e-Print: arXiv:0911.5555 [hep-lat].
7) http://www.kek.jp/ja/activity/arl/keisan.html

(おおのぎ・てつや，大阪大学大学院理学研究科)

くりこみとスケール不変性の量子的破れ

ワイルアノーマリー



静谷　謙一

1. はじめに

物の形を保ったまま長さを2倍にすると面積は4倍になり，体積は8倍となる．このような相似の概念は日常生活にも広く定着している．古典力学においても相似のうまい使い方がある．距離のべきに比例するポテンシャル $U(\boldsymbol{x}) \propto |\boldsymbol{x}|^k$ の下で運動する質点を考えてみよう．軌跡を $\boldsymbol{x}(t)$ と表し，ラグランジアンを書けば

$$L[\boldsymbol{x}(t)] = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \right)^2 - U(\boldsymbol{x}). \qquad (1)$$

ここで座標と時間を $\boldsymbol{x}' = \alpha \boldsymbol{x}$, $t' = \beta t$ と定数倍して上式で $(\boldsymbol{x}, t)$ を $(\boldsymbol{x}', t')$ に置き換えてみる．$U(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha^k U(\boldsymbol{x})$ であるので，$\beta = \alpha^{1-k/2}$ と選ぶと，$L[\boldsymbol{x}'(t')]$ と $L[\boldsymbol{x}(t)]$ は定数倍を別として全く同じ形をとる．したがって運動方程式 $m\, d^2\boldsymbol{x}/dt^2 = -\nabla U(\boldsymbol{x})$ も同じ形をとる．この結果として，運動方程式の解としてある軌跡 $\boldsymbol{x}(t)$ が実現すると，距離と時間のスケールを変えた運動 $\boldsymbol{x}'(t') = \alpha\, \boldsymbol{x}(\beta\, t)$ も実現可能であることが分かる．これを**力学的相似**と言う．

例えば調和振動子を考えて $k = 2$ と置くと $\beta = \alpha^0 = 1$ となり，調和振動の周期はその振幅によらないこと，すなわち等時性が結論できる．同様に $k = -1$ とすれば $\beta = \alpha^{3/2}$ となり，惑星の公転運動に関するケプラーの第2法則，公転周期 $\propto$ (軌道半径)$^{3/2}$ が直ちに導ける．

このように力学的相似は簡単ながらも思いがけない威力を発揮するが，量子論に進むとこの相似関係は成り立たなくなってしまう．量子論，それも場の理論の奥深い部分から素朴な相似を損なう破れが生じる．この小文ではその破れの起源を探るとともに，破れがあることで逆に物理現象に豊かな奥行きが加わることをお話ししたい．

2. 電子と光の場の理論

具体例として真空中の電子と光の相互作用を考えよう．古典論では電子は粒子であるが，量子論に進むと電子も光も粒子･波動の二面性をもつ**量子**(的な波動)と考える．以下では，原子や結晶格子の影響は無視できるように，電子の質量 $m_e \approx 511\,\mathrm{keV}/c^2$ 程度から上のエネルギーの世界，あるいは距離で言うと電子の Compton 波長 $\sim 2.4 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$ より小さな世界を考えよう．

このような微視的世界では電子は光速 c に近い速度で運動し，光を放出または吸収するとその向きを変える．したがって，相対論を考慮した記述が必要となるが，“相対論的な電子と光の量子論”である**量子電気力学**（quantum electrodynamics; QED）からは（Dirac による負エネルギー電子状態の理論的解釈を経て）新たに**反粒子**（陽電子）の存在が帰結される．相互作用を通して光は真空から電子・陽電子対を生成したり，電子・陽電子が対消滅して光に転化することも可能となる．

QED では電子は（電子/陽電子とスピンの自由

度を表す）4 成分の複素場 $\psi(x)$ で記述され，光は 4 元ベクトル場 $A_\mu(x)$ $(\mu = 0,1,2,3)$ で表現される．電子と光からなる系を記述する作用は $S = \int dtd^3\boldsymbol{x}\, L$，そして

$$
\begin{aligned}
L = &\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) \\
&-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x)^2 + eA_\mu(x)\, j^\mu(x)
\end{aligned} \tag{2}
$$

と書ける．ここで $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は電磁場を表し，4 元電流 $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ は電荷密度 j^0 と電流密度 $\boldsymbol{j}$ を表す．また，ディラック行列 $\{\gamma^\mu\}$ はある性質を持つ数値 (4×4) 行列である．

(2) 式の第 1 項と第 2 項はそれぞれ電子と光の自由な伝搬を表す．第 3 項は電子と光の相互作用を表す．行列や相対論的な記法もあり，一見複雑ではあるが，その詳細を知る必要はない．電子場 $\psi(x)$ には一階の微分 $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu = (\partial_t, \partial_{\boldsymbol{x}})$ がかかり，光の場 A_μ には 2 階の微分がかかることにのみ注意してほしい*1)．

この理論に伴う自然な相似則を知るために次元解析をしてみよう．ここでは相対論と量子論を融合した場の理論を取り扱うので，自然単位系をとり光速 c = Dirac 定数 $\hbar = 1$ と置こう．そして質量 M を基本の次元にとる．すると長さと時間は次元 -1 をもち，エネルギーは次元 1 をもつ．これを $[\boldsymbol{x}] = [t] = -1$ のように表記しよう．(2) 式の作用 S が無次元であることから，次元 $d_\psi \equiv [\psi] = 3/2$, $d_A \equiv [A_\mu] = 1$, $[e] = 0$, $[m] = 1$ が読み取れる．

任意の質量 M を使うと $x = (t, \boldsymbol{x})$ を $x' = (t', \boldsymbol{x}') = Mx$ と無次元化できる．場も $\psi(x) = M^{d_\psi}\psi'(x')$, $A_\mu(x) = M^{d_A}A'_\mu(x')$ とおいて無次元の場で表示できる*2)．作用 S をこれらの無次元量で書き直しても，その形は変わらない：

$$
S = \int d^4x'\, L[\psi'(x'), A'_\mu(x'); m', e]. \tag{3}
$$

$m' = m/M$ となるので，高エネルギー ($M \to$ 大) では電子の質量が無視できることが分かる．

この量子論で場の方程式を解いて決まる量は電子と光の伝搬や散乱の様子を表す**グリーン関数**である．例えば 2 点関数 $\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle$ には時空点 y に現れた電子が量子的な波動として時空点 x まで伝搬する様子が集約されている．この伝搬関数は相似関係

$$
\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle = M^{2d_\psi}\langle\psi'(x')\bar{\psi}'(y')\rangle \tag{4}
$$

を満たす．この関数は一般に系の並進不変性から $x - y$ の関数となり，さらに m と e にも依存することに注意すると，上記の“力学的相似”から $\langle\psi(x)\bar{\psi}(0)\rangle$ が電子質量の無視できる短距離 $x \to 0$ の極限では次元 $2d_\psi = 3$ でスケールする，つまり $\langle\psi(x)\bar{\psi}(0)\rangle \sim \gamma^\mu x_\mu/(x^2)^2$ と振る舞うことが結論できる*3)．したがって電子は短距離では自由場 $(e = 0)$ のように振る舞い，相互作用の影響は殆どないことになる．ただし実際にこの伝搬関数に対する量子補正を計算してみると，そのようにはなっていない．そのわけを次節で考えよう．

3. 量子効果とくりこみ

(2) 式の最終項は時空点 x で電子が光を放射，あるいは吸収する相互作用を表す．これを 2 度繰り返すと図 1 (a) のように，電子が伝搬の途中で光を放出し，それをすぐ吸収する過程が生じる．光と電子の伝搬の輪（ループ）が現れるが，その時空的な広がりは不確定性関係を思い浮かべれば分かるように，光のエネルギー・運動量 $k_\mu = (k_0, \boldsymbol{k})$ の逆数程度 $\triangle x_\mu \sim 1/k_\mu$ となる．実は，波長の短い光 ($k_\mu \to$ 大) は無数にあるので，それらの寄与を足し上げると答えが限りなく大きくなってしまう．これを**紫外発散の困難**と言う．

同様に図 1 (b) に見るように，光はその伝搬の途中で電子と陽電子を対生成し，それらがすぐに対消滅して光に戻るという過程も起こり得る．こ

*1) (2) 式を $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ と A_μ について変分すると電子に対する Dirac 方程式と通常の Maxwell 方程式が得られる．

*2) 今便宜上 M は次元 1 の量と仮定したが，x' や ψ' などの次元は回復して，M を単に数と見なしても良い．そのとき $\psi'(x') = M^{-d_\psi}\psi(x) = M^{-d_\psi}\psi(x'/M)$ は時空座標のスケール変換 $x' = Mx$ に対する場 $\psi(x)$ の変換則となる．

*3) $m \to 0$ とすると次元をもった量は x しかない．

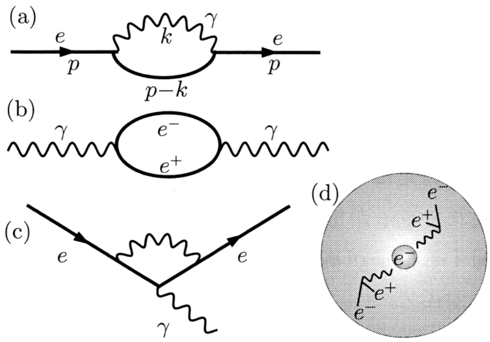


図 1 量子効果：(a) 電子．(b) 光．(c) 放射補正．(d) 量子雲は電荷を遮蔽する．

の場合も時空的に小さな電子対ループの寄与を足し上げると発散する．さらに，図 1 (c) に見るように電子が光を放出する前後に短波長の光を放出・吸収すると，その結果は発散する．この発散の程度を知るためには，短波長の切断 $\sim 1/\Lambda$，あるいはエネルギーの上限 Λ を導入するとよい．この発散を特定する手続きを**正則化**と言う．QED で出会う発散はたかだか対数的 $\sim \log \Lambda$ である．

物理的な効果としては，図 1 (a) では光が電子を覆うので，電子の質量が変化し，電子場の強度（振幅）が変わる．図 1 (b) では光を電子・陽電子の雲が覆うので，光の振幅が変わる．そして図 1 (c) の過程は電子と光の結合強度，つまり電荷 e を変える．このように発散が場の強度，質量 m，電荷 e を変えることに着目して，それらを

$$m = (Z_m/Z_2)\, m_{\mathrm{r}}, \quad e = Z_1\, e_{\mathrm{r}}/(Z_2\sqrt{Z_3}),$$
$$\psi(x) = \sqrt{Z_2}\, \psi_{\mathrm{r}}(x), \quad A^\mu(x) = \sqrt{Z_3}\, A^\mu_{\mathrm{r}}(x), \quad (5)$$

とスケール変換し，新たに導入した質量 m_{r} と電荷 e_{r} と場 $(\psi_{\mathrm{r}}, A^\mu_{\mathrm{r}})$ を有限な量とみなすと，発散をすべてスケール因子 Z_1, Z_2, Z_3, Z_m に押し込むことができる．m_{r} と e_{r} が観測にかかる電子の質量と電荷であると考えるのである．このように紫外発散を処理する操作を**くりこみ**（renormalization）と言う．くりこみにより発散を処理できるのは QED を含めた性質の良い理論に限られる．

発散は (5) 式のようにして分離できるが，その分離の仕方には（有限くりこみの）任意性がある．図 1 で見たように，電子はそのまわりに光や電子・陽電子からなる量子の雲をまとっている．波長 λ の光を照射してみれば，その電子の姿を時間・空間解像度 $\triangle t \sim \triangle|\boldsymbol{x}| \sim \lambda$ で見ることができるであろう．その解像度よりも短い時間，小さな距離で起こる量子効果，したがって紫外発散はすべてその量子雲に取り込まれている．

解像度を変えると量子雲をまとった電子の姿も変わり，その質量も電荷も場の強さも変わる．そこで，エネルギー解像度 μ で電子を見たとして，その姿からその質量 $m_{\mathrm{r}}(\mu)$，電荷 $e_{\mathrm{r}}(\mu)$，場 $\psi_{\mathrm{r}}(x)$ を実効的に決めることができる．このようにくりこみとともに，理論に解像度という概念が自然に導入される．この解像度を通常“くりこみのスケール”と呼び μ と表記することが多い．

くりこみにより電荷が変化すると言っても，電荷の保存が損なわれるわけではない．QED はもともと電流の保存 $\partial_\mu j^\mu = 0$ が成り立つよう組み立てられており，その結果として (5) 式の因子が $Z_1 = Z_2$ を満たすよう量子補正が生じる*4)．Z_1 と Z_2 は電子，陽子など荷電粒子ごとに異なるが個別に $Z_1 = Z_2$ を満たすので，電荷のくりこみ $e_{\mathrm{r}} = \sqrt{Z_3}\, e$ はすべての荷電粒子に共通となり，観測にかかる電荷 e_{r} の保存も保証される．

ここまで来ればなぜ前節の力学的相似の考察に問題があったか，明らかであろう．発散の存在を見落としたために，$\langle \psi(x)\bar{\psi}(0)\rangle$ の振舞いが自由場と同じとの結論に陥った．発散の存在を知れば，自由場の振舞いに $f(e, x^2\Lambda^2)$ という形の無次元の関数がかかり得ることに気付いたであろう．

■ 4. 量子論における相似則とくりこみ群 ■

場の理論には (2) 式の作用を見ただけでは分からない紫外発散という自由度が隠れている．くりこみの操作により発散は一見取り除かれるが，発散という大きいスケールの存在はくりこみを施した理論に本質的な変化をもたらす．それは解像度

*4) 図 1 (a) と (c) の量子補正は $Z_1 = Z_2$ を満たす．電荷のくりこみには図 1 (b) の量子補正が効く．

μとともに電荷$e_{\rm r}$や質量$m_{\rm r}$が変化する（これを“**走る**”とも形容する）という形で現れる．その“走り”を定量的に考察してみよう．

くりこみの計算は実際には次のように行う．$e_{\rm r}, m_{\rm r}, \psi_{\rm r}, A_{\rm r}^{\mu}$を用いて量子補正を計算し，その際出会った発散$\Lambda$をくりこみスケール$\mu$に準拠して分離し，$Z_1, Z_2, \ldots$因子の中に吸収する．このようにして$Z$因子とともに裸の量$m, e$が$(e_{\rm r}, m_{\rm r}, \mu, \Lambda)$の関数として決められる：

$$m(e_{\rm r}, m_{\rm r}; \mu, \Lambda), \quad e(e_{\rm r}, m_{\rm r}; \mu, \Lambda). \qquad (6)$$

裸の量m, e, Λを止めておいても，解像度μに応じて実効質量$m_{\rm r}$と電荷$e_{\rm r}$は動く．その変化率を

$$\gamma_e = \frac{\mu}{e_{\rm r}}\frac{de_{\rm r}}{d\mu}, \quad \gamma_m = \frac{\mu}{m_{\rm r}}\frac{dm_{\rm r}}{d\mu} \qquad (7)$$

と表そう．γ_e, γ_mは次元0の量であり，その関数形$\gamma(e_{\rm r}, m_{\rm r}/\mu)$は(6)式から具体的に計算できる．その主要部は発散項から決まり，$O(e_{\rm r}^2)$では

$$\gamma_e \approx e_{\rm r}^2/(12\pi^2), \ \gamma_m \approx -3e_{\rm r}^2/(8\pi^2) \qquad (8)$$

となる．これを(7)式に代入して$e_{\rm r}$と$m_{\rm r}$について解いてみると，$e_{\rm r}(\mu)$は解像度μを高めると

$$e_{\rm r}(\mu)^2 \approx e_{\rm r}(\mu_0)^2 \Big/ \left[1 - \frac{e_{\rm r}(\mu_0)^2}{12\pi^2}\ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)\right] \ (9)$$

のように増大し，同時に$m_{\rm r}(\mu)$は減少することが分かる．共に（発散が対数的であることを反映した）対数的なゆっくりした変化である．

電子をおおう電子・陽電子対からなる量子の雲は電子を重くし，同時に通常の誘電体のように作用して電子の電荷を**遮蔽**する［図1(d)］．解像度μを高めると量子雲を徐々にはがすことになるので，実効質量は減少し電荷の遮蔽は弱まるのである．

電子の伝搬関数$\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle$についても，その走りを見ることができる．$x-y$についてフーリエ変換した関数を$G(p; e, m, \Lambda)$と表そう．発散を含むことに注意．一方，(6)式で述べた手順でくりこまれた場の2点関数を計算すると発散を含まない関数$G_{\rm r}(p; e_{\rm r}, m_{\rm r}; \mu)$が得られる．両者は

$$G(p; e, m, \Lambda) = Z_2\, G_{\rm r}(p; e_{\rm r}, m_{\rm r}; \mu) \qquad (10)$$

と結びつけられる．

ここで裸の理論は解像度μの存在を知らないので，$\mu\frac{d}{d\mu}G(p; e, m, \Lambda) = 0$が成り立つことに注目しよう．この式を$G_{\rm r}(p; e_{\rm r}, m_{\rm r}; \mu)$で書き直すと

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \gamma_e e_{\rm r}\frac{\partial}{\partial e_{\rm r}} + \gamma_m m_{\rm r}\frac{\partial}{\partial m_{\rm r}} + 2\gamma_\psi\right]G_{\rm r} = 0 \qquad (11)$$

を得る．ここで$\gamma_\psi = \mu(d/d\mu)|_{e,m}\log\sqrt{Z_2}$である．(7)式と(11)式を合わせてGell-Mann–Low方程式，あるいは**くりこみ群**の方程式と言う．

くりこみ群という呼称は，(5)式あるいは(10)式に見るように，解像度μに応じた無数のくりこみの処方が存在すること，そしてそれらが互いに有限くりこみの自由度で連続的に結びつくという群の性質を持つことに由来する．このように見れば，くりこみ群こそが量子論で成り立つ，そして“使える”相似則を具現していることが分かるであろう．

歴史的にはくりこみ群の方程式は量子論における相似則の考察が始まる前に，全く別の視点から発見され使われた．電磁相互作用は結合定数が$\alpha = e_{\rm r}^2/(4\pi\epsilon_0\,\hbar c) \approx 1/137$と小さいので一般に摂動計算の収束が良いと期待される．実際，QEDは電子の**異常磁気能率**についてはαの4次に及ぶ計算により実験値と10桁を越える精度で一致をもたらすほどの精密な理論である．1950年代にはGell-MannとLow，続いてBogoliubovたちはくりこみ群の方程式が摂動論の枠内で厳密に成り立つ式であることに着目して，（それを解き直すことにより）摂動計算の系統的な改良を試みたのである．そして特に高エネルギー領域$|p^2| \gg m_e^2$では［(9)式に見るように実効的な結合強度が$e^2\log|p^2|$となるので］摂動計算の収束が悪くなることを明らかにした．もっともαは小さいので$\alpha(\mu)$の変動もわずかである上に，歴史的には後年100 GeVあたりのエネルギー・スケールで電磁相互作用はβ崩壊など粒子の崩壊を支配する**弱い相互作用**とともに**電弱統一理論**に統合されることとなったので，実際には問題とはならない．

いずれにしても摂動展開が破綻することは好ま

しくない．そこで相互作用の遮蔽が起こらない理論も模索されたが，見つからなかった．例えばQEDではいくら相互作用を工夫しても光の伝搬関数のスペクトル表示から $0 \leq Z_3 < 1$ が導かれるので，$e_{\rm r} = \sqrt{Z_3}\,e < e$ となり原理的にも電荷の遮蔽，あるいは裸の電荷の増大は避けられない．

状況が変わったのは 1970 年前後である．その頃に非可換群に基づくゲージ理論（Yang–Mills 理論）がくりこみ可能な健全な理論であることが確立されたのである．この理論は QED の光を複数の“光”に拡張した理論であり，その“光”が結びつく“電荷”の種類も増える．歴史的にはこの理論から核子を結びつける**強い相互作用**の微視的理論である**量子色力学**（quantum chromodynamics, QCD）が作られた．1973 年には Gross と Wilczek，そして Politzer により QCD では高エネルギーで相互作用が弱くなり，その構成粒子は自由粒子のように振る舞うことが明らかにされた．この特性を「**漸近自由性**（asymptotic freedom)」と呼ぶ．

■ 5. QCDにおける漸近自由性と色の閉じ込め ■

原子核を構成する陽子と中性子，そしてそれらを結びつける働きをするパイ中間子などの強い相互作用をする粒子（ハドロン）は**クォーク**と呼ばれる素粒子の複合体であることが分かっている．ハドロンの質量や反応の様子からクォークには質量や電荷の異なる u, d, s, c, b, t の 6 種類があると考えられている．“考えられている”と曖昧な言い方をした理由は後ほど明らかになる．理論的には，それぞれのクォークは色（color; 赤，緑，青の 3 種）という内部自由度をもち，この色荷には**グルーオン**と呼ばれる質量ゼロでスピン 1 の粒子が結びつくと考える．グルーオン自身 8 種の色荷をもちクォークの色荷を入れ変える働きをする．このクォークとグルーオンの相互作用が色荷の連続的な入れ替えに対して不変となるよう構成した $SU(3)$ ゲージ理論が QCD である．

QCD は (2) 式とほぼ同じ形の作用で定義されるが，QED との大きな違いはグルーオン自身が色荷をもつので，1 つのグルーオンが 2 個，3 個，… と自己増殖する点にある．加えて，スピン 1 をもつので色荷の磁石のように振る舞うことにある．このためクォークの色荷をおおうのは主にグルーオンの雲であり，しかもそれは無数の微小な color 磁石からなる雲である．そこで今度は色磁性の遮蔽が起こる．相対論では真空の誘電率と透磁率の積は一定となるので，色透磁率の増大は色誘電率の減少，つまり**色荷の逆遮蔽** $g_{\rm r} > g$ をもたらす．

その際，色荷 g は負の異常次元 $\gamma_g \approx -b\,g_{\rm r}^2 < 0$（$b$ は定数）を獲得し，色荷は解像度を高めると

$$g_{\rm r}^2(\mu) \approx 1/\bigl(b\,\log(\mu^2/\mu_0^2)\bigr) \qquad (12)$$

のように対数的にゆっくりと弱くなる．つまり，短距離ではクォークもグルーオンもほぼ自由粒子のように振る舞う．一方，色荷は遠方から見るほど強くなり，例えばクォークを単独で取り出そうとすると無限大のエネルギーが必要となる[*5]．このため全体として無色となるクォークとグルーオンの複合体（ハドロン）しか直接には観測できないと考えられる．これを「**色の閉じ込め**」と言う．相似則の破れ (12) が大きなスケールの変化を通して，漸近自由性と色の閉じ込めという対照的な現象をもたらしたことになる．

■ 6. ワイル（Weyl）アノーマリー ■

くりこみ群の方程式 (11) のもつ物理的な意味を知るには，この式と $G_{\rm r}$ に対する素朴な次元解析[*6]を組み合わせて $\mu\,\partial/\partial\mu$ を消去し，時空的なスケール変換に対する応答 $p_\mu \partial G_{\rm r}/\partial p_\mu$ に書き直してみるとよい．次のことが分かる：解像度 μ を固定しておいて $G_{\rm r}(p, m_{\rm r}, e_{\rm r}; \mu)$ の中で運動量 p_μ を変化してみると，$e_{\rm r}$ が次元 $-\gamma_e$ をもち，$m_{\rm r}$ が次元 $(1-\gamma_m)$ をもち，場 $\psi_{\rm r}$ が次元 $(\frac{3}{2}+\gamma_\psi)$ を

*5）数値的には $\mu \sim 100\,\mathrm{MeV}$ のスケール，あるいは $10^{-15}\,\mathrm{m}$ ほどの距離で $g_{\rm r} \to \infty$ となる．色荷の強度 $g_{\rm r}^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ は $100\,\mathrm{GeV}$ のスケールでも 0.1 ほどで α より一桁大きい．

*6）$G_{\rm r}(p, m_{\rm r}, e_{\rm r}, \mu)$ に $p\,\partial/\partial p + m_{\rm r}\,\partial/\partial m_{\rm r} + \mu\,\partial/\partial\mu$ を作用させると $G_{\rm r}$ の次元 $(2d_\psi - 4)$ が分かる．

もつように応答する．これらの次元をスケール次元と呼び，特に $\gamma_e, \gamma_m, \gamma_\psi$ を**異常次元**と言う．発散の存在により，いろいろな量の（スケール変換の下での）“次元” が変化するのである．

上記の応答式には $e_r\partial/\partial e_r$ や $m_r\partial/\partial m_r$ が現れるが，この微分演算の効果は数学的には作用 S から決まるある演算子の挿入に置き換えられる．このようにしてスケール不変性の破れを演算子の言葉にも翻訳できる．一方，相対論的に不変な理論のスケール不変性の破れは一般的に対称エネルギー・運動量テンソル $\Theta^{\mu\nu}$ のトレース Θ^μ_μ に集約できることが分かっている．そこで次のような “トレース恒等式” を書き下すことができる：

$$\Theta^\mu_\mu = (1-\gamma_m) m\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}\gamma_e [F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]_r. \quad (13)$$

自明な破れである質量項に加えて（高エネルギーでも無視できない）次元 4 をもつ破れ $[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]_r$ が量子効果として現れることに注意．この量子的な修正項を**ワイル量子異常**と呼ぶ*7)．

7. Callan–Symanzik（CS）方程式

1970 年前後に量子論におけるスケール不変性の研究が進展する中でくりこみ群の方程式と類似した新種の方程式が発見された．歴史的な意義を踏まえて，その内容を簡潔に紹介しよう．

スケール不変性を破る質量項がくりこみに際しどのような影響をもたらすか，考察する*8)．まず (6) 式を眺めよう．裸の電荷 e を固定 $(\delta e = 0)$ しておいて m_r を少し変化すると e_r が動く．このとき m と Z_i も動く．変化分 δm の影響は質量項 $\int d^4x\,\bar{\psi}\psi$ をグリーン関数に挿入することと等価であることが数学的に示せるので，その効果は微分演算 $\partial/\partial m|_{e,\Lambda}$ に置き換えられる．

このように $\delta m_r \neq 0 \to \delta e_r, \delta Z, \delta m$ という応答系を考えると，2 点関数 $\langle\psi_r\bar{\psi}_r\rangle \sim G_r(p, m_r, e_r)$ については次の応答方程式が得られる：

$$\left[m_r\frac{\partial}{\partial m_r} + \gamma_e^{cs} e_r \frac{\partial}{\partial e_r} + 2\gamma_\psi^{cs}\right] G_r = m_r \sigma_m\, G_r^D. \quad (14)$$

これを Callan–Symanzik 方程式と言う．G_r^D は G_r に $D \propto \int d^4x\,\bar{\psi}\psi$ を挿入したグリーン関数を表す．“異常次元” γ^{cs} と σ_m は e_r のみの関数となる．

高エネルギー $|p^2| \to \infty$ では右辺の G_r^D が左辺の G_r よりも（$1/|p|$ のべきだけ）早くゼロになることが示せるので，CS 方程式は G_r に対する斉次の式で近似できる．くりこみ群の方程式 (11) との類似・対応は今や明らかであろう．

8. 終わりに

量子論では相似則に量子的な修正が生じることをお話しした．量子的な世界では一般に観察するスケールとともに物理現象の様相が変わり，それを支配する法則も姿を変えることを納得していただけただろうか．この変化は自然の営みに彩りを添える．ここでは真空中の電子と光という状況を設定したが，身近な物質中にも相対論的な舞台があること補足しておきたい．**グラフェン** (graphene) と呼ばれる黒鉛の 1 原子層中では伝導電子が質量ゼロの相対論的電子のように振る舞い，光速の約 1/300 の速度で伝搬することが知られている．グラフェン中の電子もくりこみを受け，例えば強磁場中ではその速度因子 v_0 が磁場とともに対数的に “走る” ことが理論的に期待され，それを示唆する実験も現れている．他にも相対論的電子が出現する物質は各種あり，目下，基礎と応用の両面から熱い関心が向けられている．

*7) ワイル変換（コンフォーマル変換）は光の経路を表す光円錐 $dx^\mu dx_\mu = 0$ を不変に保つ座標変換であり，スケール変換はその一部である．相対論的な場の理論についてはスケール変換の破れを知るとワイル変換の破れも自動的に決まる．

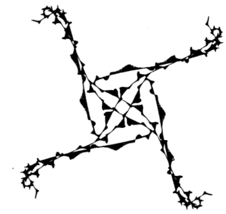
*8) 原論文のようにくりこみは電子の質量スケールにて実行するとして $\mu = m_r$ と選ぶ．こうすると議論が簡単になる．

参考文献

1) 量子異常については：藤川和男，『経路積分と対称性の量子的破れ』，岩波書店 (2001); 静谷謙一，“量子異常”（『物理学最前線 29』），共立出版 (1992).

（しずや・けんいち，京都大学基礎物理学研究所）

量子コヒーレンスの破れ



川畑　有郷

1. 波の干渉とコヒーレンス

波の干渉は高校でも学ぶ現象である．誰でもよく知っている光の二重スリットの実験では (図 1)，スクリーン上のある点で，2 つのスリットからの距離 l_1, l_2 の差が波長の整数倍であれば波の山と山が重なって明るくなり，半整数倍であれば山と谷が打ち消し合って暗くなるので，明暗の縞が観測できる（干渉縞）．

ただし，スクリーンの中心からいくら離れても縞が見えるかというとそうではない．l_1 と l_2 の距離が等しいところが一番明るく，そこから縞と垂直の方向に離れると縞はだんだんとうすくなってしまう．つまり，l_1 と l_2 の距離が大きくなるにつれて，2 つのスリットからの光は干渉しにくくなるのである．この，「波の干渉のしやすさ」を**コヒーレンス**と呼ぶ．無理に訳せば「可干渉性」であるが，ほとんど使われない．

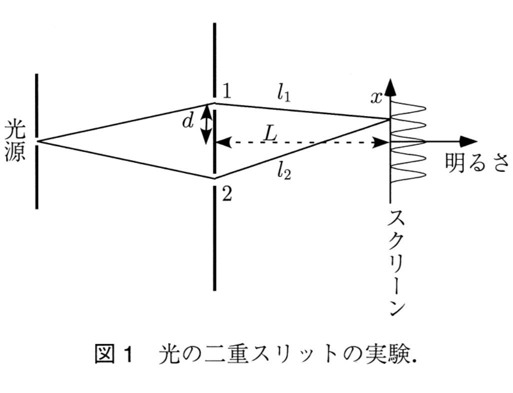


図 1　光の二重スリットの実験．

l_1 と l_2 の距離が大きくなると光が干渉しにくくなるのは，光源から出る光の性質による．干渉の説明をするときには，話を簡単にするために，光は図 2 に示したような無限に長い正弦波とするが，実際の光は有限の長さの**波束**である．波束の長さが有限で，図 1 の $l_2 - l_1$ が波束の長さより大きかったらどうなるだろうか？ 光源を出るときに 2 つに分けられた波束がある時間内に進む距離は同じであるから，図 3 のように，スリット 1 を通った波束がスクリーンに達したときには，スリット 2 を通った波束はスクリーンに達していない．したがって，これらの波束の間の干渉は起こらない．

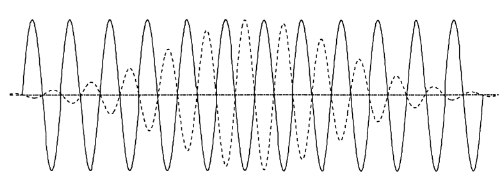


図 2　無限に長い正弦波（実線）と波束（点線）．

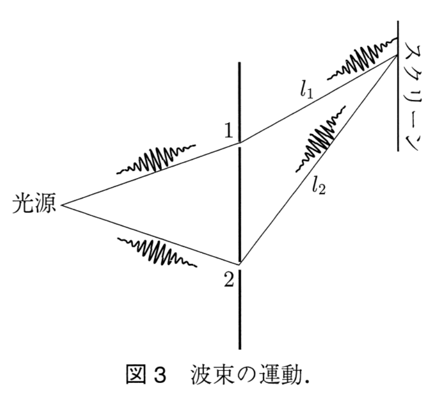


図 3　波束の運動．

波束が少し重なっても，例えば $l_2 - l_1$ が波長の半整数倍だった場合でもスクリーン上での2つの波の振幅が異なるので完全には打ち消し合わず，明るさは0にはならない．したがって，干渉縞の明暗の差は，l_1 と l_2 の距離が等しい干渉縞の中心近くでは大きく，そこから遠くなるにつれて小さくなる．波束の長さは，光源の種類による．普通の電球では短く，レーザーでは長い．これは，光を出すメカニズムの違いによる．

2. 電子波の干渉と電気伝導

光だけでなく，電子も波としての性質を持つので，干渉効果が観測できる．ただし，普通の実験条件では電子の波長は光の波長よりはるかに短いので，図1のような実験をそのまま行うのは簡単ではない．電子が波のとしての性質を持つことは，デビッソンとガーマーが示した．彼らは，電子線を結晶に当てると，X線の場合と同様にブラッグ反射を起こすことを発見した（1927年）．

電子が関係した身近な現象は，**電気伝導**である．電流とは何か，電気抵抗とは何か，ということは，高校でも学ぶものである．電気伝導の実験は，電子線の実験よりも手軽ではあるが，電気伝導において電子波の干渉の効果が観測されるようになったのは，あまり古いことではない．正確に言うと，1950年代の中頃には実験的に観測されていたのだが，それが電子波の干渉効果であると理論的に解明されたのは，1980年になってからである．

1956年に佐々木と金井[1)]は，不純物を添加した半導体[*1)]の電気抵抗が十分低温では磁場を加えると減少することを観測した（図4）．電気抵抗の磁場による変化分 $\Delta\rho$ を磁気抵抗と呼ぶので，この現象は**負の磁気抵抗**と呼ばれる．

この現象は，古典力学の範囲内では説明できない．電場で電子を加速しようとすると，ローレンツ力のために電子の軌道が電場の方向からそれて，電場の方向の電流が減るので電気抵抗は大きくなる（図5）．負の磁気抵抗のメカニズムが解明されるまでに時間がかかったのは，全く関係がなさそうな**アンダーソン局在**という現象に由来するものであったからである．

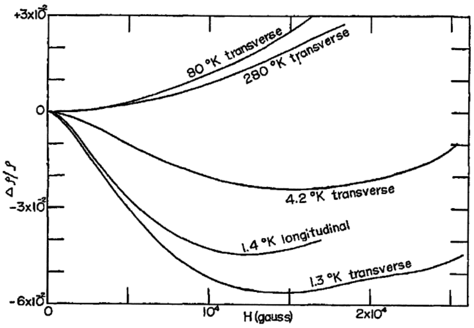


図4　ゲルマニウムの負の磁気抵抗の実験．横軸は磁場，縦軸は，磁気抵抗 $\Delta\rho$ を磁場のないときの抵抗 ρ で割ったもの（文献1）より）．

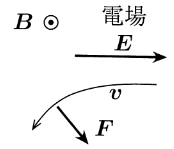


図5　古典力学における電子への磁場 $\boldsymbol{B}$ の作用．$\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{F}$ はローレンツ力．

3. アンダーソン局在

1958年にアンダーソンは，“Absence of Diffusion in Certain Random Lattice”（ある種の乱れた格子での拡散の欠如）と題する論文を発表した．拡散とは，例えば，水に砂糖の固まりを入れると，砂糖は溶けて，その分子はゆっくりとではあるが遠くへ移動していく．十分に時間をかければ，いくらでも遠くに行くことができる．これに対して，拡散の欠如とは，ある種の乱れた物質（例えば，不純物を大量に含む金属）では，電子をある場所におくと，その分布関数（波動関数の絶対値の2乗）は時間と共に広がっていくが，ある程度以上はいくら時間が経っても広がらない，ということである．即ち，電子は，あまり遠くに行くことができない．

このようなことが起こるのは，電子の固有状態が

*1)　純粋な半導体は絶縁体であるが，少量の不純物（例えば，シリコンにリン）を添加すると，金属的な性質を持つ．

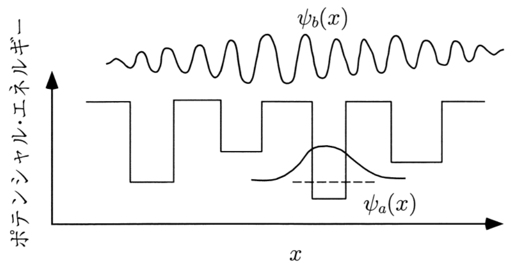


図 6　束縛状態の固有関数 $\psi_a(x)$ と局在した状態の固有関数 $\psi_b(x)$．わかりやすいように，1 次元として書いてある．

局在した状態になっているからである．局在した状態とは，固有状態の波動関数を $\psi(\boldsymbol{r})$ とすると，

$$\lim_{|\boldsymbol{r}|\to\infty} |\psi(\boldsymbol{r})| = 0 \quad (1)$$

となる状態である．束縛状態もこのような性質を持つが，局在した状態とは異なる．例として，図 6 のようなランダムな凸凹ポテンシャル・エネルギーの中で運動する電子を考えよう．図の $\psi_a(x)$ のようにポテンシャル・エネルギーの深いところに捉えられているのは束縛状態である．一方 $\psi_b(x)$ のように，ポテンシャル・エネルギーの一番高いところよりも固有エネルギーが大きくても式 (1) のように振る舞うのが局在した状態である．絶対零度では，電子はフェルミ・エネルギーよりエネルギーの低い固有状態を占めているが，これらの状態がすべて局在した状態であれば，試料の大きさが十分に大きければ電子は試料の端から端まで動くことができないので，電流は流れず絶縁体となる．

アンダーソンの理論は難解で，数学的に厳密なものではないが，人々がそれを信じたのはアンダーソンの過去の実績によるものであろう．それ以前には，絶縁体はエネルギー・バンド構造によるもののみが知られていたが，新しいタイプの絶縁体が予言されたのである．

4. アンダーソン局在と時間反転対称性 I

時間反転対称性は，物理学における重要な概念である．時間反転対称性が成り立つということは，

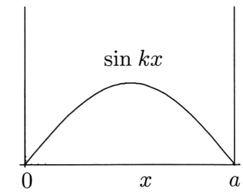


図 7　井戸型ポテンシャル中の束縛状態．

電子がある運動をすることが可能であれば，時間を逆にした運動も可能であるということである．例えば，ポテンシャルも何もない空間で電子が運動量 $\boldsymbol{p}$ で等速度運動できれば，運動量 $-\boldsymbol{p}$ で等速度運動することも可能である．これらの運動を表す波動関数は，それぞれ，$\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}$ と $\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}$ である（規格化定数は省略）．

局在した固有状態や束縛状態では，時間反転対称性が重要な役目を果たしていることに注目しよう．例として，図 7 のような井戸型ポテンシャルの中の束縛状態を考える．その波動関数は，$k = \pi/a$ として，

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin kx = -i\sqrt{\frac{1}{2a}}\left(\mathrm{e}^{ikx} - \mathrm{e}^{-ikx}\right)$$

のように互いに時間反転対称の関係にある 2 つの波 e^{ikx} と e^{-ikx} の和として表すことができる．このように，アンダーソン局在を固有状態の波動関数という面で見ても時間反転対称性は重要であるが，別の見方をしてもそれは理解できる．

5. アンダーソン局在と時間反転対称性 II

アンダーソン局在を電子の運動を直接見ることで理解しよう．不純物を含む金属のある一点に電子をおいたとする．電子の波は広がっていくが，その一部は，不純物によって散乱されながら，例えば，図 8 の経路 C_1 をたどって元の点に戻る．一方，時間反転対称性により，C_1 を逆にたどる経路 C_2 にそって元に戻る波もある．2 つの波が出発するときの位相と振幅が等しいとすれば，時間反転対称性により元に戻ったときの位相と振幅

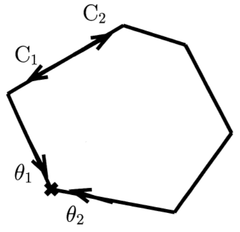


図 8　電子の波がたどる経路 C_1 とそれを時間反転した経路 C_2 と元に戻ったときの波の位相 θ_1 と θ_2.

も等しい．波の干渉効果を考えに入れなければ，2つの経路を通った波が元に戻る確率は，一方の経路を通る場合の2倍である．しかし，干渉効果を考えれば，元の点での振幅が2倍になるので，元に戻る確率は $2^2 = 4$ 倍となる．波が元に戻る経路は無限にあるが，これはすべての経路について同じである．

このように，干渉の効果により，電子が元の点に戻る確率は大きくなる．逆にいえば，電子が遠くに行く確率が減るので拡散しにくくなり電気伝導率は小さくなる．したがって，電気伝導率を

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{B}} + \varDelta\sigma$$

のように，干渉効果を無視した部分 σ_{B} と干渉による補正 $\varDelta\sigma$ によるものとに分けると，$\varDelta\sigma < 0$ である．

6. 電子波のコヒーレンスを破るもの I—磁場

上で示したような電子波の干渉による電気伝導率の減少は，色々な環境によって影響を受ける．その一つが磁場である．アンダーソン局在には時間反転対称性が重要な役目を果たすが，磁場中ではそれが成り立たなくなる．それを簡単な例で示そう．磁場中では，図9の左に示したサイクロトロン運動は可能であるが，右のように逆に回る運動

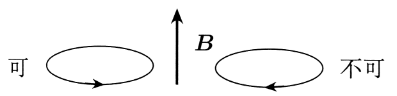


図 9　磁場中で時間反転の関係にある2つの運動.

は不可能である．元々この世界では時間反転対称性が成り立っているが，磁場を作るためのコイルに流す電流には2つの向きが可能でありこれらは互いに時間反転の関係にある．この一方を選択することで，時間反転対称性を破っているのである．

6.1 アハロノフ・ボーム効果

磁場によって電子波の干渉性が変わる例には，アハロノフ・ボーム効果がある．図10のように，基本的には電子線による二重スリットの実験であるが，2つの電子の通り道 C_1 と C_2 の間に磁場を加える．この磁場が，電子の通り道にはかかっていなくても干渉縞の様子が変わるのがミソである．磁場中のシュレディンガー方程式は，磁場を与えるベクトル・ポテンシャルを $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と書くと，

$$\left[\frac{\{\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r})$$

である．$V(\boldsymbol{r})$ は何らかのポテンシャル・エネルギーである（例えば，図10の壁をエネルギーとして表したもの）．

この方程式の解は，磁場のないときの方程式

$$\left[\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r})\right]\psi_0(\boldsymbol{r}) = E\psi_0(\boldsymbol{r})$$

の解を $\psi_0(\boldsymbol{r})$ とすると，以下に示すように

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{i\theta(\boldsymbol{r})},$$
$$\theta(\boldsymbol{r}) \equiv -\frac{e}{\hbar}\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'$$

と表せる．ここで，$\boldsymbol{r}_0$ は適当な点である．ただし，ベクトル・ポテンシャルの積分は，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0$ でなければ経路に依存する（ストークスの定理）．$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \equiv \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は磁場であるから，経路として磁場のないところを通ることにする．

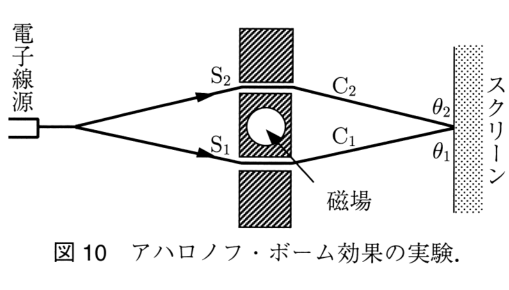


図 10　アハロノフ・ボーム効果の実験.

$\hat{\boldsymbol{p}}\theta(\boldsymbol{r}) = ie\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ であることに注目すれば，

$$\{\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\}^2\psi(\boldsymbol{r}) = \{\hat{\boldsymbol{p}}^2\psi_0(\boldsymbol{r})\}\mathrm{e}^{i\theta(\boldsymbol{r})}$$

となることは容易にわかる．これから，

$$\left[\frac{\{\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r}) = \left[\left\{\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r})\right\}\psi_0(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{e}^{i\theta(\boldsymbol{r})}$$

となることも簡単に導けるので，$\psi_0(\boldsymbol{r})$ が磁場のない場合のシュレディンガー方程式の解であれば，$\psi(\boldsymbol{r})$ が磁場のある場合の解であることがわかる．

$\boldsymbol{r}_0$ を電子線源の出口にとると $\boldsymbol{r}$ がスクリーン上にあるときは，積分の経路として，図 10 の C_1 と C_2 があり得る．これらに沿っての積分を

$$\theta_k \equiv -\frac{ie}{\hbar}\int_{\mathrm{C}_k}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}', \quad (k = 1, 2)$$

と書くと，スリット S_k を通ってスクリーン上に達した電子の波動関数は，

$$\psi_k(\boldsymbol{r}) = \psi_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{i\theta_k}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{r}$ はスクリーンの中央で，磁場のない時の 2 つの波の波動関数は同じであるとした．

スクリーンの明るさはこれらの重ね合わせの振幅の 2 乗

$$|\psi_1(\boldsymbol{r}) + |\psi_2(\boldsymbol{r})|^2 = |\psi_0(\boldsymbol{r})|^2|\mathrm{e}^{i\theta_1} + \mathrm{e}^{i\theta_2}|^2 = 2|\psi_0(\boldsymbol{r})|^2\,(1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)) \qquad (2)$$

に比例する．ここで，$\theta_1 - \theta_2$ が次のように書けることに注目しよう．

$$\theta_1 - \theta_2 = -\frac{e}{\hbar}\oint_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' = -\frac{e}{\hbar}\iint_{\mathrm{S}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{s}' = -\frac{e}{\hbar}\varPhi.$$

ただし，C は，電子線源の出口から C_1 に沿ってスクリーン上まで行き，C_2 に沿って戻る経路であり，S はそれをへりとする面である．$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')$ の線積分を $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')$ の面積分に置き換えるのにはストークスの定理を使った．また，$\varPhi$ は C_1 と C_2 の間を貫く磁束である．式 (2) から，電子の通り道には磁場がかかっていないにも関わらず，スクリーン上での明るさが磁場で変化するのがわかる．

6.2 アンダーソン局在における磁場の効果

ここで，図 8 に戻る．磁場のない場合には，経路 C_1, C_2 を通って元の場所に戻った電子波の振幅は同じで $\psi_0(\boldsymbol{r})$ であるとする．磁場のある場合には，上の例から，これらの波の波動関数は，それぞれ，$\psi_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{i\theta_0}$, $\psi_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-i\theta_0}$ となることがわかる．ここで，$\theta_0 = -e\varPhi_0/\hbar$ で，$\varPhi_0$ は C_1 を貫く磁束である．

ここでは，上の場合と違って，電子の通り道にも磁場がかかっているので，磁場によって電子の軌道が曲がることの影響があるはずであるが，平均自由行程（電子が不純物に散乱されないで走る平均の長さ）がサイクロトロン半径に比べて十分小さければそれは無視できる．

したがって，磁場中では電子が元の場所に戻ってくる確率は

$$|\psi_0(\boldsymbol{r})(\mathrm{e}^{i\theta_0} + \mathrm{e}^{-i\theta_0})|^2 = 2|\psi_0(\boldsymbol{r})|^2\left(1 + \cos\frac{2e\varPhi_0}{\hbar}\right) \qquad (3)$$

に比例する．$\varPhi_0$ の値は軌道によって色々な値をとるが，磁場中では電子が元に戻る確率は小さくなり，電子は遠くに行きやすくなる．その結果電気伝導率が増す（抵抗が減る）．これが負の磁気抵抗である．このようなメカニズムを数学的にきちんと取り入れた結果によれば，磁場による電気伝導率の増加は，絶対零度では，

$$\varDelta\sigma(B) = 0.605\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\sqrt{\frac{eB}{\hbar}} \qquad (4)$$

となる[3]．ただし，これが成り立つのは，異方性のない単純な物質の場合のみであり，物質の定数を含まないのが特徴である．

7. 電子波のコヒーレンスを破るもの II —非弾性散乱

磁場と同じく電子波のコヒーレンスを破るのが**非弾性散乱**である．電子は格子振動または他の電子によって非弾性散乱を受ける．非弾性散乱を受

けると電子のエネルギーが変わり，波数が変わるので電子波が同じ経路をたどって元に戻ったとしても非弾性散乱を受けない場合とは位相が変わってしまう．簡単な例で言えば，波数が k の場合と k' の場合では，長さ L だけ走った場合の位相の違いは kL と $k'L$ である．電子が非弾性散乱を受けるまでに走る距離を l_ε と書くと，それ以上走ればコヒーレンスが失われるのであるから，l_ε は，第1節でふれた光の波束の長さと同じような意味を持つと考えてよい．

それでは，コヒーレンスを破るものとして，磁場と非弾性散乱のどちらが主に効くのかということを考える．式(4)の右辺の因子 $\sqrt{eB/\hbar}$ に注目しよう．これは，長さの逆数の次元を持つので，長さの次元の数 $l \equiv \sqrt{\hbar/eB}$ を定義する．図8のような経路の長さを L とすると，おおざっぱにいってそれを貫く磁束は L^2B である．式(3)から，$e\Phi_0/\hbar = eL^2B/\hbar < 1$ であれば電子がもとに戻る確率はあまり減らないので，$L < l$ であるような経路では，磁場の影響は少ない．

したがって，$l < l_\varepsilon$ であれば，非弾性散乱によってコヒーレンスが破られる経路では，すでに磁場によってコヒーレンスが破られているので，非弾性散乱の電気伝導率への影響は少ない．非弾性散乱の確率は温度と共に大きくなるので，これは，低温・強磁場の場合である．逆に，高温・弱磁場では $l > l_\varepsilon$ となり，磁場によってコヒーレンスが壊されない短い経路でも非弾性散乱によりコヒーレンスが壊される．この場合の磁気伝導率は，

$$\Delta\sigma(B) = \frac{\sigma_\mathrm{B}}{12\sqrt{3}}\left(\frac{l_\varepsilon}{l_\mathrm{e}}\right)^{3/2}\left(\frac{eB\tau_\mathrm{e}}{m}\right)^2$$

である[3]．ここで，σ_B は磁場のないときの電気伝導率，l_e, τ_e は，電子が不純物によって弾性散乱（エネルギーが変わらない散乱）されるまでに走る平均の距離と時間である．

図4を見れば，磁場の小さい所，大きい所ではでは，それぞれ，$\Delta\rho \propto B^2, \sqrt{B}$ のようになっていることがわかる（$\Delta\rho = -\Delta\sigma(B)/\sigma_\mathrm{B}^2$ であることに注意．また，式(4)は磁場があまり大きいところでは成り立たない）．

電子は頻繁に不純物によって弾性散乱されるので，その運動は拡散として扱うことができる．したがって，平均の非弾性散乱の時間間隔を τ_ε とすると，l_ε は $l_\varepsilon = \sqrt{D\tau_\varepsilon}$ である．ここで，D は拡散係数である．低温では，電子どうしの非弾性散乱が格子振動によるものより強く，アルトシューラー等によって[4]，

$$\frac{1}{\tau_\varepsilon} \approx \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{D}\right)^{3/2}\frac{1}{\nu\hbar^{5/2}}$$

のように与えられている．ここで，ν はフェルミ準位における状態密度である．

8. まとめ

固体物理学，特に電気伝導においては，電子波のコヒーレンスの影響が明確に現れる現象は多くはなく，唯一の例が半導体の負の磁気抵抗である．電子波の干渉のため，電気伝導率は電子を粒子として扱った場合よりも小さくなるが，磁場や非弾性散乱のためコヒーレンスが破られて，電気伝導は増加する．別の見方をすれば，磁場の作用は時間反転対称性を破ることによりアンダーソン局在（または，その揺らぎ）を抑えることである．

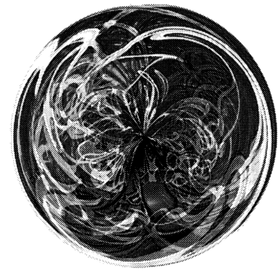
負の磁気抵抗のメカニズムの解明にはほぼ四半世紀かかったが，この現象は非常に電気伝導率のよい試料でも観測されており，アンダーソン局在と関係があるとは誰も思わなかったからである．

参考文献

1) W. Sasaki and Y. Kanai; *J. Phys. Soc. Jpn.* **11** (1956) 894.
2) P.W. Anderson; *Phys. Rev.* **109** (1958) 1492.
3) A. Kawabata; *J. Phys. Soc. Jpn.* **49** (1980) 628.
4) B.L. Altshuler, A.G. Aronov, and D.E. Khmelnitsky; *J. Phys. C* **15** (1982) 7367.

（かわばた・ありさと，学習院大学名誉教授）

ローレンツ変換の破れ



佐藤 文隆

1. 相対論と対称性

対称性という数学原理で物理学の法則を見る視点はアインシュタインの特殊相対論のミンコフスキーやプランクによる解釈から始まる．この流れでヒルベルトの研究室にいたエミリー・ネーターが解析力学の中での「**対称性と保存則**」の関係を明らかにした．論文は1918年だが1915年頃には学界には知られていたらしい．量子力学の成立を待って，このスクールの流れであるワイル，ウィグナーが群論を物理学に持ち込んで新たな分野を築いた．「破れ」は，大体，保存則か対称性の破れだが，この2つは同根なのである．

1905年のアインシュタインの論文「運動物体の電磁気学」には対称性の視点はない．ガリレオ変換と時間空間の並進・回転対称性を合わせてみる視点を1890年代にポワンカレがすでに出していたが，何か物理現象が変わるわけでもないデリケートな理論的視点なので，あまり拡がらなかった．またローレンツは電磁気学という特殊な物理法則に特有な対称性としていわゆるローレンツ変換を出していた．こちらは，長たらしい数式の連鎖であまり美しい議論ではなかった．しかし，**ローレンツ変換**の数式は彼に始まるので，アインシュタインが後に時空の対称性として再提起してもアインシュタインの名前を冠することにはならなかった．**時空の対称性**であることがすっきりするのは1907年にミンコフスキーの4次元時空によってである．

アインシュタイン的には，驚異の年1905年の3つの論文のうち，学界的に直ぐに反応があったのは光子説とブラウン運動理論であった．ヨーロッパ物理学界にナマでデビューした1911年のソルベイー会議に呼ばれたのは光子説であった．ただ，当時は珍しく理論専業の教授だったプランクが「最小作用原理」「対称性」といった一般原理での理論の整備を手がけており，ポワンカレ，アインシュタイン，ミンコフスキーを対称性で統一する視点を明確にした．

アインシュタインは，電磁気力と同じように重力の相対論的理論を作ると言う試みを1911年から始めるが，当初は等価原理を指導原理にして，「等速運動」系という特殊な変換を一般の「加速度運動」系に拡張すると言う発想であった．その痕跡が「特殊」相対論，「一般」相対論という名にとどめている．

ベルンに戻って，同級生であったマルセル・グロスマンとこの作業を始める中で，数学者グロスマンがイタリアの数学者のレビチビタたちのリーマン幾何の記号法を持ってきた．これには，幾何法則と座標の話として，**一般座標変換に対して不変な形式**と言う数学との結合があった．数学道具の中にすでに対称性の観点が組み込まれていた．この路線で一般相対論が完成したのは，アインシュタインが，プランクとネルンストの勧誘で，ベルリン大学に移籍して間もなくの第一次大戦中であっ

た．ヒルベルトがアインシュタイン方程式を最小作用原理から導出する理論を提出するが，ここでも作用積分が一般座標変換に対して不変であるという対称性が組み込まれていた．

2. ローレンツ・ポワンカレ変換と保存則

ローレンツ変換と空間と時間の対称性が一体化してたのが**ローレンツ・ポワンカレ変換**である．**ネーター理論**によれば，空間の並進対称性が運動量保存，空間の回転対称性が角運動量保存，時間並進対称性がエネルギー保存の根拠である．エネルギー保存は原理でなく対称性から2次的に導かれる法則なのである[1)]．

ここまではよく知られているが，ガリレオ・ローレンツ変換の対称性に対応した保存量が登場しない．この保存量はガリレオ変換対称性があるニュートン力学にもあるはずである．しかし，初等ニュートン力学での保存則は運動量，角運動量，エネルギーの3つだけが言われる．この言い方はネーター的には不十分である．

この「新しい」保存量は，自由運動の場合は次のように導かれる．ラグランジアン $L=(m/2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$ で無限小ガリレオ変換は $x'=x+\epsilon_x t, y'=y+\epsilon_y t, z'=z+\epsilon_z t$ である．ネーター定理はラグランジアンの対称性変換による変分が，オイラー・ラグランジェ運動方程式運動に沿って，不変であるというものである．これから

$$\sum_a m\dot{x}_a \epsilon_a = \sum_a \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\delta x_a\right]. \qquad (1)$$

したがって

$$\epsilon_a \sum_a \frac{d}{dt}\left[m x_a - m\dot{x}_a t\right] = 0. \qquad (2)$$

これから $m\dot{x}t-mx, m\dot{y}t-my, m\dot{z}t-mz$ が保存量となる．多体系でやると重心が等速運動すると言った結果になる[1,2)]．

相対論版では

$$p_a t-(E/c^2)x_a,\ \ a=x,y,z \qquad (3)$$

が保存量となる．ここで E は相対論的エネルギーで $E=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}$ である．これは時間方向も含めた“角運動量”になっている．

3. ローレンツ変換が破れるとは？

「ローレンツ変換が破れる」＝「相対論が破れる」と言っても何も驚くことはない．力の働く場ではローレンツ・ポアンカレ対称性は成立しないのが普通である．これらの対称性は「外場なし」や「孤立系」に対して成り立つのであって，厳密には地上の重力場のものとではそんな系はほとんどない．その意味では現実の時空ではこの対称性はすべて近似的である．地球から「十分離れて」と言っても，離れれば隣の星に近づくし，銀河系から出て行っても，空っぽな空間はない．宇宙は大局的にはどこも同じように重力場がある．平均の効果を宇宙膨張にくり込んで消すことはできるが，平均値の周りの約十万分の一のオーダーの揺らぎが残る．この揺らぎが現在の天体宇宙構造を作ってきたのである．

もちろんローレンツ変換の対称性は“空っぽの時空では”という条件付であるから，存在するものを“全部片付けて”という前提なのだが，いまや時空も重力という物質だから“片付けたら”時空もなくなる．重力でなくても，もし**“取り剥がし不可能な”（un-removable）な外場**があれば，この対称性はいつも破れていることになる．

さらに「揺らぎ」を無視して平均の宇宙膨張に戻ると，今度は時間方向の並進対称性が破れている．膨張宇宙の時空は大局的にはミンコフスキー時空ではない．すなわち，**エネルギー保存則は厳密には成立しない**のである．破れは，Δt の間での変動は $H\Delta t$ のオーダーで破れる可能性がある（宇宙は一様には膨張してないのでこれ以下）．ここで H はハッブル定数で $H\sim T^{-1}$ は現在の膨張のタイムスケールで，1秒の間の保存は 10^{-18} のオーダーで狂ってくるのである．

マクロな物体の運動がこんな精度で測定できることなどないからいいとしても，素粒子の場の量

子論を想い起こすと，時空の大局構造がミンコフスキー時空でないとなると一大事であるような気がする．素粒子の場の量子論での実験と比べるべき量の計算には反応の中間状態があり，多くの場合，個数オペレータもかかったオペレータの物理量の真空期待値をとり，k 空間で $-\infty$ から ∞ まで積分する（あるいは積分したものの真空平均を取る）．これはミンコフスキー時空の大局構造が前提になっている．もし膨張宇宙の大局構造の時空を前提にして中間状態積分をやれと言われると赤外部分で修正が要る．それが実験と比べる計算値に影響するか？ こういう問題である．大雑把に言って「**くり込み可能**」とは中間状態積分で端っこの積分値が効かないということであるから，極端な端の k にカットオフのとり方に影響されない．

4. 相対性原理と自発的対称性の破れ

大局的に膨張宇宙時空がミンコフスキー時空でないことは明白である．したがって，時間方向の並進対称性がない．3 次元空間方向は大局的に並進対称性をもつ宇宙モデルが観測によく合っている．この膨張宇宙でのローレンツ対称性は，並進性でなく，局所的なものであり，それが局所慣性系である．膨張があるから 4 次元時空の各時空ポイントに付随した別々の局所慣性系である．各ポイントである特別な局所慣性系を設定できる．宇宙背景放射 CMB が平均して等方的に観測される座標系である．この系は同時にバリオンのような質量を持つ物質の平均的に静止している系とほぼ同じである．我々の銀河系はこの CMB 等方系に対して約 600 km/s の高速で運動している．銀河系の集団の重心が静止に近いと考えられている．また膨張のハッブル定数が等方的に観測される座標系も特定できる．いずれにせよ，約 600 km/s でも光速に比べれば小さく，これらの **CMB 等方系**，**バリオン（重心）静止系**，**等方ハッブル定数**の 3 つの座標系は一致していると言ってよい．これを**宇宙静止系**と呼ぼう．

すなわち，ローレンツ変換で結びついている無数の局所慣性系のうちの一つの特別な意味をもつ宇宙静止系が特定できる[3)]（一様等方からの揺らぎの大きさである約十万分の一という数字は観測値であって理論では演繹できていないが，この揺らぎと速度の揺らぎの関係は理解できる）．

歴史的には，地球中心系，太陽中心系といった座標系がその圧倒的な存在感により特別な位置を与えられていると思われてきた．相対性原理というのはその思い込みを突破して，「どの慣性系も対等である」ということを確認してきたのである．そして今日，我々は再び宇宙静止系という特殊な慣性系に意味を与えるのかどうかが問われている．ここで再び「そんなものは物理法則の設定には何の意味もなく，“どの慣性系も対等である”」と宣言するのかどうかと言う判断である．本稿の「ローレンツ変換の破れ」とは「この宇宙ではこの対等性は自発的に破れている」という見方である．

ここで「静止」した存在は「質量」と関係し，素粒子の標準理論のパラダイムでは「質量は自発的対称性の破れでマスゼロ場に 2 次的に附与される性質である」という 20 世紀の認識を想起させる．すると宇宙静止系という座標系はこの自発的対称性の破れという膨張宇宙で起こった歴史的な出来事を経由して発生したものと考えることになる．具体的にはある一つの秩序状態が自発的に（根拠なく自由に）選択され，それまで持っていた対称性の一部を失うわけである．この「破れる対称性」にローレンツ変換が入らないかと言う疑念がここで浮上する．後述の「ローレンツ変換の破れ」の原因として考えられる 2 つのうちの一つがこれであり，筆者が最近主張してるのはこのタイプである[3~5)]．

5. 方向性を持つ外場の可能性

標準理論での「質量の起源」を起こすのはヒッグス場であるが，ヒッグス場はスカラー場なので，この自発的対称性の破れでは方向性（3 次元 ＋ 1 次元での方向）は登場しないから，ローレンツ変換とは絡まない．だから標準理論を少し拡張した**超**

対称性を含む理論を考えると，多くのテンソル場のような“ヒッグス場”もあってもよくなる．この宇宙である特殊な外場が生ずる自発的対称性の破れを考える．この外場はどこでも一定であり，引っ剥がすことはできない．普遍的ではない「この宇宙用の素粒子物理のスペック」がここで決まるわけである．

そしてこの外場とスピノールの物質場との結合定数は素粒子ごとに違ってよい（クォークとレプトンで違うとか，世代で違うとか）．こういうことになっていると，限界速度が素粒子ごとに違うという可能性が生まれる．

例えば，Dirac 粒子 A のラグランジアンが次のようだとする[5]．

$$L_{\mathrm{A}} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - \alpha_{\mathrm{A}}\phi\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}g_{\mathrm{A}}F_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi \tag{4}$$

ここで ψ は A の Dirac 場，ϕ は Higgs スカラー場で α_{A} は結合定数，$F_{\mu\nu}$ はテンソル場で g_{A} は結合定数．右辺の第一項は運動項で，第二項は Higgs メカニズムで質量をつくる湯川結合項である．第三項がここで新たに仮定された相互作用項である．このラグランジアンでは ϕ と $F^{\mu\nu}$ の運動項は無視した．これらの場は外場として扱う．この宇宙の中に敷き詰められている“取り剥がし不可能な”な外場なのである．$\langle\phi\rangle$ の有限値が $m_{\mathrm{A}} = \alpha_{\mathrm{A}}\langle\phi\rangle$ のように粒子 A に質量を与える．

ここで新たに導入したテンソル場も次のようにゼロでない値だったとする．

$$\langle F^{00}\rangle = B, \quad \text{他成分}\ \langle F^{\mu\nu}\rangle = 0. \tag{5}$$

もちろんこの成分は座標の取り方に依存するが，ここで登場する特殊な座標系が宇宙静止系である．すると，分散関係は B の 1 次のオーダーで

$$p^\mu p_\mu - m_{\mathrm{A}}^2 c^2 = -2g_{\mathrm{A}}B(E/c)^2 \tag{6}$$

となる．すなわち，エネルギー・運動量関係は次のように変更を受ける．

$$(1+g_{\mathrm{A}}B)(E/c)^2 = p^2 + m_{\mathrm{A}}^2 c^2, \tag{7}$$

ここで c は時間と空間の単位をつなぐ普遍定数である．この関係式で大事なのは B との結合 g_{A} が粒子の種類(A)によって違うためにエネルギー・運動量関係が粒子の種類ごとに違っていることである．ここで $E \to \infty$ となる速度を**限界速度**と呼ぶことにする．限界速度と質量を

$$c_{\mathrm{A}}^2 = \frac{c^2}{1+g_{\mathrm{A}}B}, m_{\mathrm{A}B}^2 = (1+g_{\mathrm{A}}B)m_{\mathrm{A}}^2 \quad (8)$$

と定義すれば，次の通常の関係が再現される．

$$E^2 = p^2c_{\mathrm{A}}^2 + m_{\mathrm{AB}}^2c_{\mathrm{A}}^4. \quad (9)$$

ただし，c_{A} は g_{A} を通して粒子の種類ごとに違うのである．厳密にいうと上式での E, p は宇宙静止系での値である．しかし，この式は $c \to c_{\mathrm{A}}$ と書き換えた，修正ローレンツ変換に対して共変的である．このために，この修正ローレンツ変換で結ばれた一般の慣性系での E, p に対してもこの関係は成り立つ．修正ローレンツ変換でのローレンツ因子は次のようになる．

$$\gamma_{\mathrm{A}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c_{\mathrm{A}}}\right)^2}}. \quad (10)$$

ローレンツ対称性は回復したように見えるが，複数の種類の粒子がある場合は系全体にはローレンツ対称性は存在しない．その意味では，自発的対称性の破れによってローレンツ対称性は破れたと言うことができる．

6. “最小長さ不変”を満たす変換

近年の量子時空やストリング理論という流れでいうと，「自発的対称性の破れ」ではない，もう一つのローレンツ変換の破り方がある．こういう理論では「時空を拡大して見れば連続体でなく…」といった「**最小のプランク長さ**」があるイメージが多く語られるが，通常のローレンツ変換ではローレンツ収縮があるから長さなどは観測系依存でどうにでもなる．そうかと言って「ある系での長さ」といえばすべての慣性系が対等という相対性原理を破ることになる[5,6]．

ここで，これまで述べてきた「この宇宙でのある座標系」に特別な地位を与えた対称性の破れでなく，あくまでも対等原理＝相対性原理を維持すれば，ローレンツ変換の式を変更して“最小長さ不変”を折り込んだものに修正することになる．ローレンツ変換で不変なものは光速であった．新変換では“光速＋最小長さ”の２つが一定である．こう発想すると，不変なものは２つと言わずどんどん増やせばいいという数学的課題が生まれる．ともかく，こういう拡張ローレンツ対称性の研究は，数学的にも群論の研究として膨大な数の論文がある．ここでは，これには触れない．

7. ２つの変換

自発的に「対等原理＝相対性原理」を破るという，もとの話に戻る．外場のある場合の粒子運動を考える場合，ローレンツ変換に対する対称性はしばしば次のような異なった意味で語られる場合がある．いま古典的外場と粒子がある場合を想定する．ここで真のローレンツ変換とは外場も粒子のエネルギー・運動量も別の値に変換される．しかしこの場合は，外場と粒子の間の物理的関係は変わらない．物理的に同じ状態を立場を変えて観測する変換に過ぎない．その意味でこれを**受動変換**と呼ぼう[3,5]．

この「真の」変換ではなく，外場をそのままにして粒子のエネルギー・運動量だけを変える粒子変換を考えることができる．この場合は物理状況は違うのであるから，外場があれば「**粒子変換対称性**」は破れている．先述の幾つもの限界速度が生じるモデルでいう「ローレンツ変換の破れ」はこの粒子変換対称性の破れとみなすことできる[3~5]．

「定性的には破れている」が定量的な差は宇宙静止系に対して限界速度に迫る速度の運動体においてのみ現象として現われる．それ以外では近似的に通常のローレンツ変換でいいのである．しかし，限界速度に近い現象を見たことないために，「対等原理＝相対性原理」が厳密には成立していると錯覚している，という見方になる．

8. 唯一でない限界速度

ここで素粒子ごとに違う限界速度がどういう効果を生むかの話題をいくつか列記しておく．

(a) 限界速度と光速度

現在のように多くの素粒子を認識した段階から振り返ると光という素粒子が特別な立場を占めているローレンツ変換の導入が奇妙に見える．素粒子平等主義で考えれば，まず素粒子ごとに別々な限界速度 c_a を割り振った上で，それらがどれだけ近いかを実験で検証すべきだとなる．いくら差が小さいとは言え差があれば必然的に絶対系の存在となり，「どの慣性系も対等」という相対性原理は破れる．定性的に大きな飛躍となる．そういう観点で様々な実験や観測を見直すと，「破れ」があるとしても，その大きさには制限がある[7]．これを今の「破り」方でいうと

$$\epsilon = |1-(c_{\rm em}/c_{\rm m})^2| < 10^{-21} \qquad (11)$$

という制限がついている．

(b) 真空チェレンコフ過程と不安定光子[3]

真空チェレンコフ過程：$c_{\rm m} > c_{\rm em}$

この場合，エネルギーが $m/\sqrt{1-(c_{\rm em}/c_{\rm m})^2}$ 以上で超光速になり，媒質中の場合と同じように真空チェレンコフ効果が起こる．

$$m/\sqrt{\epsilon} \sim 10^{10.5} m \sqrt{\frac{10^{-21}}{\epsilon}}. \qquad (12)$$

このエネルギー以上の荷電粒子は外場や媒質中でなくても放射してエネルギーをここまで減少することになる．

不安定光子：$c_{\rm m} < c_{\rm em}$

この場合は，光子の自由崩壊が可能になるエネルギー，$2m_e/\sqrt{(c_{\rm em}/c_{\rm m})^2-1}$，以上になると $\gamma \to e^+ + e^-$ というチャネルが開いてきて，光子は崩壊するようになる．ここで m_e は最小質量の荷電粒子，電子の質量である．

このように限界速度の近傍では新たな効果があるが，破綻はない．また，ここでいうエネルギーはすべて絶対系で測ったものである．この宇宙静止系での超高エネルギー現象がチェックポイントになる．

(c) 素粒子物理

Kostelecky ら[8]，ローレンツ対称性，CPT 対称性，などの破れの原因として詳細に解析している．また，ブレーンワールド・モデルについてもローレンツ対称性の破れ項の可能性が論じられている．例えば，ニュートリノ振動は質量で解決をみたが，それ以前に Coleman と Glashow はこの解釈のために「速度の固有状態」というアイデイアを提出していた．質量はゼロでも，種類によって速度が異なれば「振動」は起こる．彼らはこうしても「ゲージ対称性」と「くり込み可能性」は維持されることを確認している[9]．

(d) カットオフと「くり込み」

場の理論の「発散の困難」がくり込み原理で解決するまでは，カットオフで救う試み（田地など）があったが「ローレンツ変換対称性を破る」と批判されて不評であった．しかし，宇宙静止系があるとなれば，定性的とはいえ様々な原理の位置づけが変わってくる．外場があれば「平等原理＝相対性原理」はなく，「真の」受動変換不変は無意味になる．特に，**ハドロンの質量起源**の問題と関連してくる．

9. GZK カットオフの変更

宇宙静止系に対する超高エネルギー現象となると浮上するのが宇宙線の最高エネルギー領域の情報である．粒子変換に対する対称性が破れてくる可能性がある．

CMB 発見当時，この光子と宇宙線粒子との反応による，エネルギースペクトルの**GZK カットオフ**が提案された．筆者はこの課題に関係して 1972 年に「ローレンツ変換の破れ」検証の可能性を指摘した[10]．近年，宇宙線観測がようやくこの領域に迫っている[11]．

複数の限界速度があると GZK カットオフがどう変わるかをみておく．スペクトルのカットオフの起源は宇宙線の陽子が CMB の光子と衝突して Δ という陽子の共鳴粒子をつくり得る閾値のこと，

その条件は次のようになる．

$$(E+W)^2-(P+p)^2c_\Delta^2>m_\Delta^2c_\Delta^4. \quad (13)$$

ここで E は陽子だから，$E^2=P^2c_\mathrm{P}^2+m_\mathrm{P}^2c_\mathrm{P}^4$ であり，Δ 粒子の限界速度 c_Δ とは違う陽子の限界速度 c_P で書かれている．W を 2.7 K の CMB の平均エネルギー．正面衝突を考え，また $|c_\Delta-c_\mathrm{P}|/c_\mathrm{P}\ll 1$ や $E\gg m_\mathrm{P}c_\mathrm{P}^2$ を考慮すれば，

$$2WE>\frac{m_\Delta^2c_\Delta^4-m_\mathrm{P}^2c_\mathrm{P}^4}{2}+\frac{c_\Delta-c_\mathrm{P}}{c_\mathrm{P}}E^2.$$

この不等式で決まる E の範囲は $(c_\Delta-c_\mathrm{P})$ がゼロかどうかで全く異なっている．例えば，2 次方程式の判別式から，

$$\frac{c_\Delta-c_\mathrm{P}}{c_\mathrm{P}}>\frac{2W^2}{(m_\Delta^2-m_\mathrm{P}^2)c_\mathrm{P}^4}\sim 10^{-25}\left(\frac{T_\mathrm{CMB}}{2.7K}\right)^2$$

なら，Δ を形成できる E の範囲は存在しないことになる．すなわち，GZK カットオフは存在しないと結論が定性的に逆転する．

参考文献

1) 佐藤文隆『対称性と保存則』岩波書店，2004, 69p.
2) エングラート編「シュヴィンガー量子力学」清水清孝，日向裕幸訳，シュプリンガー・ジャパン，2003, 180p.
3) 佐藤文隆 “相対性原理と超高エネルギー宇宙線”，「科学」岩波書店，2001 年 2 月号，183p.
4) H. Sato, *Journal of Physical Society of Japan*, **Vol 70** (2001), SupplementB, 64–67; astro-ph0304100; astro-ph0311306.
5) H. Sato, “How to Violate Lorentz Invariance”, *Prog. Theor. Phys., Supplement* **No 163** (2006), 163–173.
6) G. Amelino-Camelia, *et al*, *Nature* **393** (1998), 763; G. Amelino-Camelia and G. Smolin, *Physical Review* **D 80** (2009), 084017.
7) M.P. Haugan and C.M. Will, *Physics Today* **1987 May**, 69.
8) V.A. Kostelecky and C.D. Lane, *Phys. Rev.* **D60** (1999), 116010.
9) S. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Rev.* **D59** (1999), 116008.
10) H. Sato and T. Tati, *Prog. Theor. Phys.* **47** (1972), 1788.
11) http://jemeuso.riken.jp/

（さとう・ふみたか，甲南大学，京都大学名誉教授）

非平衡系における対称性の破れ



早川　尚男

1. はじめに

水を容器に入れて底から温めると温度差が大きくなるにつれて単なる熱伝導状態から回転対称性を破った対流ロールの出現，さらに温度差を上げると乱れた状態を経てセル状の秩序の高い状態まで実現する．この対流に伴うパターン形成は先駆的な研究を行ったレイレー卿 (Rayleigh) とベナール (Benard) に因んで**レイレー・ベナール対流**と呼ばれる．このように時間・空間の対称性の破れは非平衡系にも普遍的に現れる．むしろ空間の何らかの**対称性の破れ**に伴ってパターンが認識され，時間反転対称性が破れているからこそダイナミックな時間発展が認識できると思うべきであろう．ある種の究極な非平衡系である人間を例に取るとその造作はもちろん回転対称ではない．ほぼ正中線に対して左右対称にはなっているが，心臓を含めた臓器の位置や顔の造作も左右で若干異なっている．また人間が受精卵から細胞分裂から一生が始まり，母体から出て成長し，やがて老いて死んでいくことからも時間反転対称性は明らかに破れている．このように非平衡系では対称性の破れは至るところで観測されている．本稿では，対称性の破れを利用した非平衡物理現象の特徴付けをどのように行うか，またより根源的な問いとして非平衡性をもたらす**時間反転対称性の破れ**をどのように理解すべきかを簡単に解説する．

2. 対称性の破れと分岐理論：ギンツブルク・ランダウ方程式

対称性の破れを物理系へ適用したのはランダウが対称性の考察のみで2次相転移の一般論を考察したのを嚆矢とする[1)]．簡単のためにイジングモデルのようなスピン変数が ± 1 を取り，その向きに特別の意味がない $\boldsymbol{Z}(1)$ **対称性**を持つ系を考えよう．ランダウは平均場近似の範囲内でイジングモデルを低温にしたときに現れる強磁性相を**秩序変数**（磁化）A が

$$A = \begin{cases} 0 & (\mu < 0), \\ \pm\sqrt{\mu} & (\mu \geq 0) \end{cases} \tag{1}$$

の値を取る相転移と捉えた．しかし，実際に強磁性相に入ったら $A = \sqrt{\mu}$ か $-\sqrt{\mu}$ のどちらかの値が選ばれるので元の方程式の対称性が失われ，$Z(1)$ 対称性が破れる．

ランダウ理論の考え方は非平衡系でも有効であり，また常微分方程式の解の分岐理論は**ランダウ理論**と基本的に同じである[2)]．実際，秩序変数の時間発展は

$$\frac{dA}{dt} = \mu A - A^3 \tag{2}$$

で記述されるだろう．(1), (2) 式で表される相転移は，力学系の言葉を使えば**超臨界分岐**，あるいは秩序変数が取る値の形状から**ピッチフォーク分岐**とも呼ぶ (図 1)．(2) 式は $F\{A\} = -(\mu/2)A^2 + A^4/4$

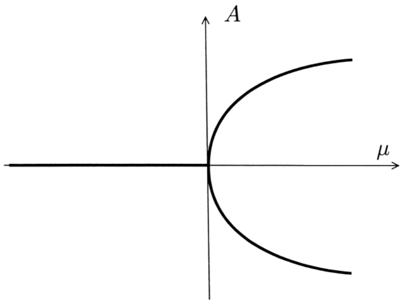


図1 ピッチフォーク分岐の模式図．

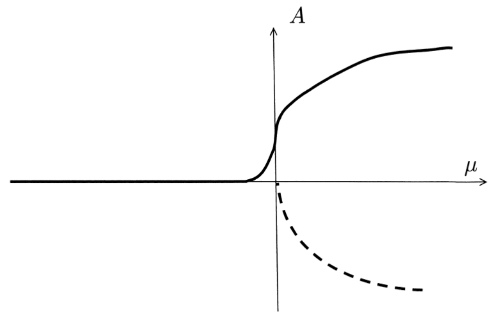


図2 サドル・ノード分岐の模式図．外場によって $A>0$ の分枝のみが安定化し，$h=0$ で双安定な $A<0$ の分枝（破線）は選択されない．

を導入すれば

$$\frac{dA}{dt}=-\frac{\partial F\{A\}}{\partial A} \qquad (3)$$

とも書ける．(3) 式で $F\{A\}$ は，任意の位相変数に対して不変で，転移点近傍では $A\to 0$ となる要請から A^2 で展開できる**ランダウ展開**された自由エネルギーである*1)．

(2) 式は A の正負の変換に対して対称になっている．しかし外場 h を導入して (3) 式を

$$\frac{dA}{dt}=\mu A-A^3+h \qquad (4)$$

と書き換えると，もはや A の正負を取り換えた式は不変ではなく，$t\to\infty$ で安定な解は $A>0$ の場合のみである*2)．(4) 式での分岐は**サドル・ノード分岐**と呼ぶ（図 2）．

今までは μ の変化に対して安定な値が連続的に変化する場合，すなわち 2 次相転移に対応した分岐を議論していたが，1 次転移のような不連続転移も議論可能である．その場合は (2) 式を

$$\frac{dA}{dt}=\mu A+A^3-A^5 \qquad (5)$$

に置き換えれば良い．(5) 式で $\mu>0$ とすると A は

$$A^2=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4\mu}),\quad A=0 \qquad (6)$$

の定常解を持つ．この定常解を考慮し，(5) 式の挙動を見ると $A<-\sqrt{(1+\sqrt{1+4\mu})/2}$, $0<A<\sqrt{(1+\sqrt{1+4\mu})/2}$ で $dA/dt>0$ であるので，定常解のうち $A=\pm\sqrt{(1+\sqrt{1+4\mu})/2}$ の解は安定で，$A=0$ は不安定であることが分かる．また $-1/4<\mu<0$ の領域では 5 つの解が共存し得るが，容易に分かる通り $A=0,\pm\sqrt{(1+\sqrt{1-4|\mu|})/2}$ の 3 つの値が安定である．どちらがより安定かは μ の値に依るが，実際には初期条件等でそれらの安定解のうち 1 つの値が選ばれる．さらに $\mu<-1/4$ では，定常解は $A=0$ と実部が $\pm1/\sqrt{2}$ の値の複素数の解がある．しかし安定な解は容易に分かる通り $A=0$ のみである．これまでの結果をまとめると (5) 式の安定な解は

$$A=\begin{cases}0 & (\mu<-1/4),\\ 0,\ \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-4|\mu|}}{2}} & (-1/4\le\mu<0),\\ \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4\mu}}{2}} & (\mu\ge 0)\end{cases} \qquad (7)$$

となる（図 3 参照）．これらの解 (7) は $\mu=-1/4$ で不連続に解が変化する上に，$-1/4<\mu<0$ で $A=0$ と $A\neq 0$ の解の選択は履歴依存で決まるので 1 次転移を表現していると言える．このような分岐は**亜臨界分岐**と呼ばれる．もちろん，$A\neq 0$ の解が選択されると $Z(1)$ 対称性を破ることになる．

---

*1） なお，(3) 式では A の確率定常分布が平衡分布にならない．従って (3) 式は高温から十分低温へ急冷した際のダイナミックスを表している．平衡状態への緩和を保証するためには (3) 式に揺動散逸関係式を充たすノイズを加える必要がある．

*2） 摂動によってすぐわかる通り，$h\ll\mu^{3/2}$ の条件下での安定な解は $A\simeq\sqrt{\mu}\{1+h/(2\mu^{3/2})+\cdots\}$ である．

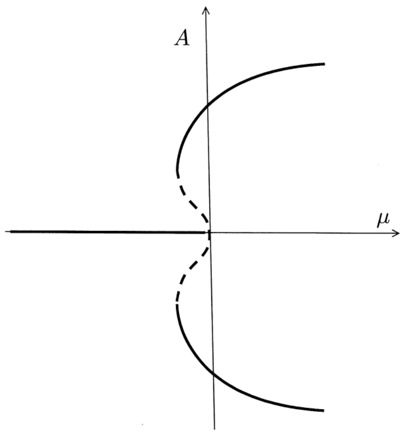


図3 亜臨界分岐の模式図．破線は不安定な定常解で実線が安定な定常解．$-1/4 < \mu < 0$ では3つの解が安定で初期条件等で解の選択が行われる．

またランダウは(1)式の相転移を，超伝導系に適用し，その考え方の有効性が広く知られるようになった[3)]．例えばヘリウムの超流動，超伝導，XYモデル等の3次元系での2次相転移と対応するのは，複素振幅 A が従う常微分方程式

$$\frac{dA}{dt} = \mu A - |A|^2 A \tag{8}$$

が示す超臨界分岐である．ここで秩序変数あるいは凝縮パラメータは $|A|$ であり

$$|A| = \begin{cases} 0 & (\mu < 0), \\ \sqrt{\mu} & (\mu \geq 0) \end{cases} \tag{9}$$

という値が安定である．もちろんこの複素振幅は位相変数 θ_0 の選び方に依らず $A \to Ae^{i\theta_0}$ というゲージ変換に対して不変である．また $\mu > 0$ では A の等価な位相のうち一つが選択されるために回転対称性（ $\boldsymbol{U(1)}$ **対称性**）が破れている．

今までの例は基本的に平衡系でも対応物のある分岐現象であり，ことさら非平衡特有の性質が必要であったわけではない．しかし $\mu < 0$ から $\mu > 0$ に変化するにつれて複素固有値の虚部が共役であり実数部分が正に変化する**ホップ（Hopf）分岐**の場合は平衡系の概念で表現できない．実際，このような場合は素子が一様に回転しても不変なので，着目している物理量 x は複素振幅 A，角振動数 ω_0 を用いて $x = Ae^{i\omega_0 t} + c.c.$ と書け，

$$\frac{dA}{dt} = \mu A - g|A|^2 A \tag{10}$$

というギンツブルク・ランダウ方程式が導かれる．ここで $c.c.$ は複素共役を表す．また定数 g の実部は(8)式にならって1とすることが可能であるが，系全体が振動を始める問題では一般に $\mu > 0$ で角振動数が ω_0 に留らず虚部 c_1 も存在する．すなわち $g = 1 + ic_1$, $A = Re^{i\varphi}$ と置いたときに(10)式は

$$\dot{R} = \mu R - R^3, \tag{11}$$

$$\dot{\varphi} = -c_1 R^2 \tag{12}$$

という実振幅 R と位相変数 φ の連立方程式になる．g が複素数であるために(10)式は**複素ギンツブルク・ランダウ方程式**と呼ばれ自由エネルギーのない系のダイナミックスを記述するモデルになっている．

ここまで駆け足で対称性の破れと関連した代表的な分岐現象とその非平衡ダイナミックスを記述するギンツブルク・ランダウ方程式を説明してきた．今までは空間自由度を無視してきたが，それを入れることで多彩なダイナミックスの出現が期待できる．例えば拡散結合をした(10)式は

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mu A - (1+ic_1)|A|^2 A + (1+ic_2)\nabla^2 A \tag{13}$$

となるが $1 + c_1 c_2 < 0$ のときは解がカオティックになることが知られている[2)]．このような非平衡系の対称性の破れとパターン形成については既に完成された学問体系があり，ここで書いた簡単な議論で汲み尽されない豊富な現象とそれを記述する物理学がある．それらを詳細に記述した成書も多数あるので，本稿ではその説明を省略し，次の話題に移りたい．

3. ゆらぎの定理と時間反転対称性の破れ

前節では分岐理論とギンツブルク・ランダウ方程式の関わりを手短に紹介した．しかしそのいずれもが時間の1階微分方程式であり，時間反転対

称性を破っている．現象論的には巨視的な系の時間発展に向きがあるのは当然であるが，そもそも統計力学の祖ボルツマンが問いかけたのは熱力学第 2 法則のような時間の矢はどこから出現したのかということであったことを思い出すとその問いかけは無意味ではない．

オーソドックスな考え方では観測者が知り得る情報には限界があり，**情報の粗視化**が必然的に生じた結果としてエントロピーが増えるというものである．その描像に異を挟むつもりはないが，粗視化が時間反転対称性の破れの必要条件になっているかというとそうではない．実際，最近の**ゆらぎの定理**や **Jarzynski 等式**は基本的に粗視化を含まない力学的アプローチであり，それらが熱力学第 2 法則，**久保公式**や**オンサーガーの相反定理**までも含んだ形になっていることが注目されている．本稿ではそれらの新しい関係式の本質をオリジナル論文とは違った側面からごく簡単に紹介しよう[4,5]．

今，考えている系は孤立しておらず環境あるいは熱浴の影響を常に受けているとしよう*3)．従って系と環境の間には一般に散逸があり，外場を加えても定常化し得る．系は量子力学に従っても古典力学に従ってもどちらでも良く，外場も振動外場でも良いが，簡単のため定常外場をかけた古典系を考える．系に外場をかけはじめた時刻を時間の原点 $\tau = 0$ として，時刻 t までに $0 \leq \tau \leq t$ の任意の時刻 τ での系のヘルムホルツの自由エネルギー $F(\tau)$ は

$$e^{-\beta \Delta F} = \frac{Z(t)}{Z(0)} \tag{14}$$

と変化する．ここで $\Delta F \equiv F(t) - F(0)$ であり，β は初期の系の逆温度である．また $Z(t)$ は分配関数であり，$Z(t) = e^{-\beta F(t)} = \int d\Gamma_t e^{-\beta H(t)}$ を充たす*4)．但し $H(t)$ は時刻 t の系のエネルギー（ハミルトニアン）であり，$\int d\Gamma_t$ は時刻 t での全粒子の位置と運動量の組である位相変数による積分を表す．ここで系の位相体積は相体積の変化率 $\Lambda(s)$ を用いて $\int d\Gamma_t = \int d\Gamma_0 \exp[\int_0^t ds \Lambda(s)]$ という関係がある．この相体積の変化率を考慮すると，ただちに

$$e^{-\beta \Delta F} = \left\langle e^{-\int_0^t ds \Omega(s)} \right\rangle \tag{15}$$

を得る．ここで $\Omega(t) = \beta \dot{H}(t) - \Lambda(t)$ は散逸関数と呼ばれ，また平均の意味は

$$\langle A \rangle \equiv \int d\Gamma_0 \frac{e^{-\beta H(0)}}{Z(0)} A \tag{16}$$

である．つまり $\langle A \rangle$ は物理量 A の初期カノニカルアンサンブル平均となっている．ここで系のダイナミックスに散逸がなく位相体積が保存する場合には**リュウビルの定理**より相体積は保存量になり $\Lambda(s) = 0$ である．従って (15) 式は

$$e^{-\beta \Delta F} = \langle e^{-\beta W} \rangle \tag{17}$$

となる．但し，W は系にされる仕事であり，$W \equiv \int_0^t ds \dot{H}(s) = H(t) - H(0)$ で導入されている．(17) 式は Jarzynski 等式として知られている[6]．ここで **Jenssen の不等式** $\langle \exp[-\int_0^t ds \Omega(s)] \rangle \geq \exp[-\langle \int_0^t ds \Omega(s) \rangle]$ を用いると (15) 式は

$$\int_0^t ds \langle \Omega(s) \rangle \geq \beta \Delta F \tag{18}$$

となる．この式は散逸がないダイナミックスでは

$$\langle W \rangle \geq \Delta F \tag{19}$$

となり熱力学第 2 法則の一表現を与える．

特に時間的な可逆なハミルトン系のダイナミックスから，時間的に不可逆な (19) 式が現れたのは興味深い．この不可逆性はまさに時間反転対称性の破れである．ここでの不可逆性の起源はもちろん，初期条件としてカノニカル分布に従うとしたことによる．このような初期条件を取ることは一

*3) こういう設定では不可逆性は環境との散逸によって，最初から存在することになる．しかしそのカップリングの弱い極限を考えることで孤立系として完全に可逆な力学系を作ることが可能である．

*4) こう書くと一般に $\Delta F \neq 0$ であるように思うだろうが，例えばハミルトニアンが $H(\tau) = H(\Gamma_\tau)$ のように位相変数を通してのみ時間に依存する場合には $Z(t) = Z(0)$ であり，$\Delta F = 0$ である．従って $\Delta F \neq 0$ になる必要条件としてハミルトニアンが $H(\tau) = H(\Gamma_\tau, \tau)$ のように時間に陽に依存する必要がある．

見自然だが，その条件はダイナミックスの中で自然に選択されたものではない点に注意が必要である．実際，$\tau < 0$ からも力学で時間発展があって $\tau = 0$ でカノニカル分布が実現するには過去のメモリーを失うように系にランダムな擾乱を与える必要がある．逆に言えば，初期分布関数が平衡分布という特殊な分布に従わないとこのような不可逆性の表現は得られない．また一般には等温系でもなく終状態が平衡ではない場合に自由エネルギー変化という表現にも気をつけるべきである．つまりJarzynski等式は恒等式であるとしても，必ずしも力学的に熱力学第2法則を証明したことにはならない．それらの制約があるにせよ，時刻 t で再び平衡になったとしたとき，ダイナミックスに粗視化の操作を入れずに力学的に不可逆性の表現が得られたことは注目すべきである．なお，オリジナル論文等でのJarzynski等式の議論は全系を孤立系とし，リュウビルの定理が常に成り立っているものとして扱っている[6]．その際，ハミルトニアンは系のハミルトニアンではなく環境の影響を一部含む必要がある．Jarzynski等式はシンプルな議論から極めて非自明な結果を導くので発表当初から多くの議論を呼んだ．暫くして(17)式をサポートする実験[7]が出て，またJarzynski自身がいくつかの疑念に丁寧に答えたこともあり，今では広く受け容れられるようになった．そのあたりの議論については拙著を含めた文献を参照されたい[4]．

さてここでハミルトニアンの変化が位相変数を通してのみ現れる，すなわち $\varDelta F = 0$ の場合を考えよう．このとき(15)式は

$$\left\langle \exp\left[-\int_0^t ds\varOmega(s)\right]\right\rangle = 1 \qquad (20)$$

となるが，これは積分型のゆらぎの定理[8]として知られる式である[*5]．また $\varOmega(t)$ は系のエネルギー変化率と相体積変化率の和から成り，それぞれが時間の奇関数であるから

$$\left\langle \exp\left[\int_0^t ds\varOmega(-s)\right]\right\rangle = 1 \qquad (21)$$

とも書ける．この式は時刻 t での分布関数 $\rho(\varGamma_0, t)$ が

$$\rho(\varGamma_0, t) = \rho_{\rm eq}\exp\left[\int_0^t ds\varOmega(-s)\right] \qquad (22)$$

と発展していると解釈できる．但し $\rho_{\rm eq} = e^{-\beta H(0)}/Z(0)$ である．

(22)式の結果，物理量 $A(t)$ の時間発展は $\langle A(t)\rangle = \int d\varGamma_0 A(0)\rho(\varGamma_0, t)$ から

$$\langle A(t)\rangle = \left\langle A(0)\exp\left[\int_0^t ds\varOmega(-s)\right]\right\rangle \qquad (23)$$

で与えられる．この式を時間で微分すると $(d/dt)\langle A(t)\rangle = \int d\varGamma_0 \rho(\varGamma_0, t)\varOmega(-t)A(0) = \langle \varOmega(0)A(t)\rangle$ を得るが，それを時間積分することで

$$\langle A(t)\rangle = \langle A(0)\rangle + \int_0^t ds\langle \varOmega(0)A(s)\rangle \qquad (24)$$

という式を得る．この式は振動外場の量子系でも有効であり，線形応答理論の久保公式を一般化した公式を与えている．(24)式と久保公式の関係を見るために，さしあたって散逸が無視でき，外場 $F_{\rm ex}$ に駆動されているケースを考えよう．このとき，$\varOmega(t)$ は仕事率なのでカレント $j(t)$ と外力の積，すなわち $\varOmega(t) = j(t)F_{\rm ex}$ と書けるだろう．また $A(t) = j(t)$ とすると $\langle j(0)\rangle = 0$ のために

$$\langle j(t)\rangle = F_{\rm ex}\int_0^t ds\langle j(0)j(t)\rangle \qquad (25)$$

となる．ここで形式上 $t \to \infty$ とすればカレントの時間相関で輸送係数を与える久保公式と一致する[*6]．ここでいくつかの注意が必要である．散逸がないモデルではカレントの時間相関関数の積分は一般には収束しないだろう．この事実は久保公式で収束因子を入れて積分を行っていることに対応している．一方，散逸がある場合は相体積変化

*5) 積分型ゆらぎの定理から通常の時間に依存したゆらぎの定理はただちに導かれる[5]が，その導出は読者への課題としておこう．またゆらぎの定理の検証実験は多数あるので，ここでは最近の量子ゆらぎの定理の検証実験のみ紹介しておこう[9]．

*6) 通常の統計力学を考える状況では混合性の仮定より初期条件依存性がなくなり，関係式が普遍性を持つようになる．

率由来の補正項が入るだけでなく，カレントの平均 $\langle j(t) \rangle$ には当然散逸の影響も考慮した時間発展が含まれる．一方，時間相関の相手である $j(0)$ あるいは $\Omega(0)$ では系のハミルトニアンの情報だけで書ける．このあたりの事情はこの小文で解説するにはやや込み入っているので原論文でも参考にされたい[10)]．

久保公式は時間に不可逆な輸送係数を与えるのであるから可逆なダイナミックスから久保公式が導かれるのは初学者には奇妙な話と映るだろう．それを時間並進対称性の破れと捉えることも可能かもしれない．実際には系が環境と相互作用があり，（無限小でも良いから）散逸の影響がないと久保公式自体は有限の値を与えないので，久保公式が時間反転対称性の破れを表していると捉えるのは適切ではない．むしろ初期条件として平衡分布を仮定したことによる，ゆらぎの定理に現れる時間反転対称性の破れが非平衡系の特徴となっている．また脚注6に記した通り $t \to \infty$ とすることで初期分布の選択に依存しない普遍的な法則になると思われる．このように時間の矢の起源という問題についても一定の理解が進みつつあるのがボルツマンの問いから140年を経た非平衡物理学の現状である．

4. まとめに代えて

本稿では非平衡系における対称性の破れとして，20–30年ほど前に盛んに議論された微分方程式の分岐理論と主に空間的な対称性の破れを表す（非平衡）相転移の関係を2節で，またここ十数年の間に盛んに議論されるようになったゆらぎの定理等と時間反転対称性の破れを簡単に解説してみた．50年ほど前に発見された久保公式は額縁と言われたが，些か古くなった額縁は今や新しいものに置き換えられつつある．一方で久保公式という額縁の中には計算的技術に発展と相俟って輸送理論という完成された絵画が描かれているのに比べると，特にここ十数年の間に見つかった新しい額縁の中には入れるべき絵画が未だ見つかっていないように思われる．この状況を変えていくのは，本稿を読んでいる若い読者の活躍が必要である．十年経って改めて本稿を読み直した際に，新しい額縁の中に素晴らしい絵画が収まっていることを期待して筆を置きたい．

参考文献

1) 原著論文は L.D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **7**, 19 (1937). また教科書として L.D. ランダウ，E.M. リフシッツ，『統計物理学 第3版』（岩波書店，1980）.
2) 分岐理論について書かれた解説や本は数多いが，森肇，蔵本由紀，『散逸構造とカオス』（岩波書店，1994）や Y. Kuramoto, *Chemical Oscillation, Waves and Turbulence* (Dover, 2003) で十分である．なお，複素ギンツブルク・ランダウ方程式は蔵本が初めて導入したが，彼がつけた名称がそのまま定着した．
3) V.L. Ginzburg and L.D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 1064 (1950).
4) 一般的な邦書の教科書として早川尚男，『非平衡統計力学』（SGC ライブラリ，サイエンス社，2007）.
5) D.J. Evans and G.P. Morriss, *Statistical Mechanics of Nonequilibrium Liquids*, 2nd Edition (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008).
6) C. Jarzynski, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2690 (1997).
7) J. Liphardt, S. Dummon, S.B. Smith, I. Tinoco Jr., C. Bustamante, *Science* **296**, 1832 (2002).
8) U. Seifeld, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 040602 (2005).
9) S. Nakamura, Y. Yamaguchi, M. Hashisaki, K. Kobayashi, T. Ono, R. Leturcq, K. Ensslin, K. Saito, Y. Utsumi, A.C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 080602 (2010).
10) S-H. Chong, M. Otsuki and H. Hayakawa, *Phys. Rev. E* **81**, 041130 (2010); H. Hayakawa, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, No.**184**, 545 (2010).

（はやかわ・ひさお，京都大学基礎物理学研究所）

クォークとレプトンはいつ分かれたか

大統一理論における破れ

川村　嘉春

1. はじめに

本題に入る前に，ぼやきから始める．先日，ある授業でレポート課題を出した．「A4 サイズの用紙に数ページで」と指定したにも関わらず，各問いに対して，3 行程度の文章のみで記載されたレポートが複数の学生から提出された．唖然とした．大学生の事情を最大限に考慮したとしても，物足りない．2 週間あまりの間に，数ページを埋めることはそんなに難しいことなのだろうか．実際に簡単な実験を試みるとか，図やグラフや数式を交えるとか，正解に辿り着けなくても問題の背景になっている現象に関する解説をするとか，苦慮したあとが見えるレポートを提出してほしかったのだが，期待通りにはいかないものである．伸び代を信じて，地道に指導するしかあるまい．

2. 課題

今回，私に課せられた課題は「クォークとレプトンはいつ分かれたか」というタイトルの下で，執筆することである．まず，課題に関する背景知識を説明する必要がある．具体的には，「クォークとは何か？」，「レプトンとは何か？」である．このような問いは，芋蔓式に新たな問いを生み出す．先取りして記載すると，「相互作用とは何か？」，「ゲージ原理とは何か？」などである．まずは，これらについて芋蔓式に説明しよう．

3. 背景知識

3.1 クォーク

クォークとは，自然界を構成する基本粒子の一つである[1]．クォークは現在までに 6 種類見つかっていて，それぞれ，アップクォーク (u)，ダウンクォーク (d)，ストレンジクォーク (s)，チャームクォーク (c)，ボトムクォーク (b)，トップクォーク (t) と命名されている．クォークの電荷 Q (素電荷 e を単位とする)，バリオン数 B，質量 ($1\,\mathrm{GeV} = 10^3\,\mathrm{MeV} = 10^9\,\mathrm{eV}$) を表 1 に記載した[2]．クォークはスピン 1/2 でディラック方程式に従うフェルミオン（ディラックフェルミオン）である．素粒子は整数スピンを持つボソンと半奇数スピンを持つフェルミオンに大別される．また，素粒子には反粒子が存在する．反粒子は粒子と同じ質量を持ち，Q や B のような量子数は反対の値を取る．

表 1　クォークの電荷，バリオン数，質量．

クォーク	Q	B	質量
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$1.5 \sim 3.3\,\mathrm{MeV}/c^2$
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$3.5 \sim 6.0\,\mathrm{MeV}/c^2$
s	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$70 \sim 130\,\mathrm{MeV}/c^2$
c	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$1.16 \sim 1.34\,\mathrm{GeV}/c^2$
b	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$4.1 \sim 4.4\,\mathrm{GeV}/c^2$
t	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$171.3\,\mathrm{GeV}/c^2$

クォークは $2e/3$ や $-e/3$ といった半端な電荷を持っていて，ハドロンと呼ばれる粒子の中に閉じ込められている．

3.2 ハドロン

ハドロンとは，クォークやその反粒子（反クォーク）から構成された複合粒子で，バリオンとメソンに大別される．**バリオン**は3個のクォークから構成された半奇数スピンを持つ複合粒子で，陽子(p)，中性子（n)，ラムダ粒子（Λ^0）などが存在する．p，n，Λ^0 の Q，B，質量，構成要素を表2に記載した．

表2 p，n，Λ^0 の Q，B，質量，構成要素．

バリオン	Q	B	質量	構成要素
p	1	1	938.3 MeV/c^2	uud
n	0	1	939.6 MeV/c^2	udd
Λ^0	0	1	1115.7 MeV/c^2	uds

原子核はpとnから構成されている．原子核を構成する力は核力と呼ばれ，π メソンにより媒介される．核力の下で，pとnは同一粒子のごとく振る舞い，アイソスピンと呼ばれる量子数を導入して，pとnを核子と呼ばれる粒子の別の状態として扱うことができる．具体的には，$SU(2)$ の2重項（**2** 表現）を成す．

一方，π メソンは3種類存在して，$SU(2)$ の3重項（**3** 表現）を成す．π メソンのように，クォークと反クォークから構成される複合粒子は**メソン**と呼ばれている．π メソンの Q，B，質量，構成要素を表3に記載した．

表3 π メソンの Q，B，質量，構成要素．

メソン	Q	B	質量	構成要素
π^+	1	0	139.6 MeV/c^2	$\mathrm{u\bar{d}}$
π^0	0	0	135.0 MeV/c^2	$\mathrm{u\bar{u}-d\bar{d}}$
π^-	−1	0	139.6 MeV/c^2	$\mathrm{d\bar{u}}$

クォークや反クォークを束縛してハドロンを構成する相互作用は**強い相互作用**と呼ばれている．

3.3 相互作用

場の量子論では，場と粒子は同一の実体として捉えられ，力を媒介する粒子をやりとりすることにより粒子の間に相互作用が働くと考える．

素粒子の間に働く普遍性を持つ相互作用として，強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用がよく知られている．**電磁相互作用**は電磁場の量子である光子をやりとりすることにより働き，量子電磁力学として定式化されている．強い相互作用や弱い相互作用も力を媒介する粒子をやりとりすることにより働く．

3.4 量子色力学

量子色力学とは，クォーク（と反クォーク）を基本粒子として，その間に働く強い相互作用を記述する場の量子論である．強い相互作用において，電荷に相当するものはカラー荷と呼ばれる $SU(3)$ 代数に従うチャージである．各クォークはカラーの自由度3を持ち，$SU(3)$ の3重項（**3** 表現）を成す．カラー荷の存在により，その周りに強い相互作用を媒介する粒子であるグルーオンの場が生成される．グルーオン自身もカラー荷を持っていて，ハドロンの内部に閉じ込められている．クォークとグルーオンの間の相互作用の形は，電磁相互作用と同じように，ゲージ原理と呼ばれる指導原理を用いて決定することができる．

3.5 ゲージ原理

ゲージ原理とは，「局所的な変換の下で物理法則は不変である.」という要請である．量子電磁力学の場合，電荷の保存に関する変換は大局的な $U(1)$ 変換である．この変換にゲージ原理を採用することにより，光子の場が導入され，量子電磁力学の作用積分の形が決まる．正確には，特殊相対性原理も要請している．同様にして，量子色力学の場合，カラー荷の保存に関する変換は大局的な $SU(3)$ 変換である．この変換にゲージ原理を採用することにより，グルーオンの場が導入され，量子色力学の作用積分の形が決まる．局所的な変換は群を成し，その群は一般的にゲージ群と呼ばれている．また，導入される相互作用を媒介する場（粒子）は一般的にゲージ場（ゲージ粒子）と呼ばれている．

3.6 電弱統一理論

弱い相互作用の典型例は β 崩壊である．β 崩壊とは，nがpと電子(e)と反電子ニュートリノ($\bar{\nu}_{\mathrm{e}}$)に崩壊する現象である．クォークのレベルでは，dがuとeと $\bar{\nu}_{\mathrm{e}}$ に崩壊する現象である．弱い相互作用を通じてn(d)が電荷が異なるp(u)に変換

するので，電磁相互作用と絡む．実際，弱い相互作用は**電弱統一理論**と呼ばれる $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に基づくゲージ理論として，電磁相互作用と統一した形で定式化される．ここで，$SU(2)_L$ は弱いアイソスピンに関する群で左巻きのワイルフェルミオンに作用する．下付き添え字の L は左巻きを表している．また，$U(1)_Y$ は弱いハイパー荷 Y に関する群である．電荷 Q は $SU(2)_L$ の第3成分 T_L^3 の固有値と Y の和 $Q = T_L^3 + Y$ で与えられる．

弱いスケールと呼ばれるエネルギースケール（$v = 246\,\mathrm{GeV}$）で，$SU(2)_L \times U(1)_Y$ が $U(1)_{\mathrm{EM}}$（電磁相互作用のゲージ群）に自発的に崩壊することにより，弱い相互作用と電磁相互作用が生じる．壊れた対称性に付随する相互作用が弱い相互作用に相当する．

3.7 ヘリシティ

左巻きのワイルフェルミオンとは，ヘリシティ $\hat{h}$ が $-\hbar/2$ の粒子で粒子の進行方向とスピンの向きが逆向きである．ここで，ヘリシティとは，粒子の進行方向へのスピン $\boldsymbol{S}$ の射影成分を表す量で運動量 $\boldsymbol{p}$ を用いて，$\hat{h} \equiv \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$ で定義される．一方，右巻きのワイルフェルミオンとは，$\hat{h}$ が $\hbar/2$ の粒子で粒子の進行方向とスピンの向きが同じ向きである．ワイルフェルミオンは質量ゼロで光の速さ $c = 3.0 \times 10^8\mathrm{m/s}$ で運動するため，いかなる慣性系においても $\hat{h}$ の値は変わらない．

3.8 自発的対称性の破れ

縮退した真空が存在する場合，真空の選択により，理論の有する対称性の一部が壊れて実現する場合がある．このような現象は**自発的対称性の破れ**と呼ばれている．ここで，真空とはエネルギーが最小の状態である．自発的対称性の破れの帰結として，南部・ゴールドストーン粒子（NG 粒子）の存在が挙げられる．NG 粒子は壊れた対称性に付随する粒子で，その質量はゼロである．壊れる対称性が局所的な対称性の場合，NG 粒子は壊れる対称性に関するゲージ粒子に吸われて非物理的になると同時に，ゲージ粒子は質量を獲得する．このような質量獲得機構が**ヒッグス機構**である．

電弱統一理論において，ヒッグス機構を通じて，弱い相互作用を媒介するウィークボソンと呼ばれるゲージ粒子 $W^{\pm}$, Z が陽子の百倍ほどの質量を獲得する．ヒッグス粒子と呼ばれる NG 粒子の相棒は吸われずに残り，大型ハドロン衝突実験（LHC）において，その発見が期待されている．

3.9 レプトン

β 崩壊で登場した e と $\bar{\nu}_{\mathrm{e}}$ は強い相互作用をしないフェルミオンでそれらは総称して，レプトンと呼ばれている．クォーク同様，レプトンも 6 種類見つかっていて，それぞれ，電子，電子ニュートリノ（ν_{e}），ミューオン（μ），ミューオンニュートリノ（ν_μ），タウオン（τ），タウオンニュートリノ（ν_τ）と命名されている．レプトンの量子数と質量を表 4 に記載した．L はレプトン数と呼ばれる量子数で，クォークのレプトン数はゼロである．

表 4 レプトンの Q，B，L，質量．

レプトン	Q	B	L	質量
e	-1	0	1	$0.511\,\mathrm{MeV}/c^2$
ν_{e}	0	0	1	$< 2\,\mathrm{eV}/c^2$
μ	-1	0	1	$105.66\,\mathrm{MeV}/c^2$
ν_μ	0	0	1	$< 0.19\,\mathrm{MeV}/c^2$
τ	-1	0	1	$1.777\,\mathrm{GeV}/c^2$
ν_τ	0	0	1	$< 18.2\,\mathrm{MeV}/c^2$

3.10 標準模型

標準模型とは，量子色力学と電弱統一理論を総合した理論である．すなわち，3 世代のクォークとレプトンを物質粒子とするゲージ群 $G_{\mathrm{SM}} \equiv SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ に基づくゲージ理論で $SU(3)_C$ に関する部分は強い相互作用を記述し，$SU(2)_L \times U(1)_Y$ に関する部分はヒッグス機構により $U(1)_{\mathrm{EM}}$ に壊れるという性質を内包した理論である．ヒッグス機構によりワイルフェルミオンである物質粒子も質量を獲得し，ディラックフェルミオンになる．第 1 世代の物質粒子に関するゲージ量子数を表 5 に記載した．ここで，ニュートリノに関する観測結果を踏まえて右手型のニュートリノ ν_{eR} を導入している．また，c は粒子を反粒子に変える変換である荷電共役を表している．

表5　物質粒子のゲージ量子数：第2世代，第3世代も同様の量子数を持つ．

物質粒子	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	T^3_L	Y
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}$
$(u_R)^c$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\mathbf{1}$	0	$-\frac{2}{3}$
$(d_R)^c$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\mathbf{1}$	0	$\frac{1}{3}$
$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}$
$(e_R)^c$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	1
$(\nu_{eR})^c$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	0

4. ウォームアップ（その1）

課題に戻る前に脱線しよう．「物理学ゼミナール」と称する授業において，グループディスカションに先立ちウォームアップを兼ねて，物理や数学に関する問題を解かせている．先日，出した問題は単振り子の運動に関するもので，『単振り子の糸の長さを ℓ，周期を T，おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g，単振り子のふれの角度を θ として，運動方程式を解かずに T に関する関係式を導きなさい.』である．$\sin\theta$ が θ で近似できる場合，単振動の運動に帰着する．この場合の T に関する公式を暗記している学生が多数いたので，すぐに解答に行き着くのではと思ったが，各グループとも悪戦苦闘していた．読者の方々は，すでにお分かりだと思う．キーワードは**次元解析**で，答えは $T = f(\theta)\sqrt{\ell/g}$ である．ここで，$f(\theta)$ は θ の関数でその具体形は次元解析だけでは決まらない．

5. 課題の再考

それでは，「クォークとレプトンはいつ分かれたか.」という課題に移ろう．この問いかけは，「クォークとレプトンは，ある高いエネルギースケール以上では見分けのつかないもの，共通の性質を有するものとして統合される.」という前提に基づいている．そこで，我々の立場として，この前提を受け入れることにする．ただし，3節で見たように弱いスケール以下ではクォークとレプトンはかなり異なる性質を有していて，その違いは量子数や質量の違いに起因している．このことも念頭に置く必要がある．課題に対する正攻法は，前提を実現する理論に基づいて答えを見出すことである．

6. ウォームアップ（その2）

正攻法を取る前に，ウォームアップとして，『「クォークとレプトンはいつ分かれたか」を理論を特定せずに考察しなさい.』という問題に取り組もう．つまり，クォークとレプトンがいかなる形で統合されるのか，いかなる機構で分離するのかについては問わないことにする．有効な手段は次元解析であろう．クォークとレプトンが分かれたエネルギースケールを E_X とすると，分かれた時刻 t_X（宇宙誕生時から測った時刻）は次元解析により，

$$t_X = \frac{\hbar}{E_X} \tag{1}$$

となる．ここで，$\hbar = 6.58 \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV{\cdot}s}$，不定な係数は1に選んだ．(1) より，$E_X$ を評価することが次の課題となる．

E_X を評価する方法として，次の2つが考えられる．(A) クォークとレプトンの統合に伴って，結合定数の間にある種の関係式が E_X 以上で成立する場合，結合定数のエネルギー依存性を吟味する．(B) β 崩壊における n と p のごとく，E_X 以上でクォークとレプトンが相互転換する場合，これに伴う現象を吟味する．

ここでは，方法 (B) に基づいて考察する．E_X 以上で，バリオン数やレプトン数の保存が成り立たないとする．その帰結として，バリオンからメソンやレプトンへの転換・崩壊が起こる可能性がある．ショッキングな例として，陽子崩壊が考えられる．陽子崩壊に関与する相互作用が E_X にのみ依存する場合，陽子の寿命 τ_p を次元解析により見積もると，

$$\tau_\mathrm{p} = \frac{\hbar}{m_\mathrm{p}c^2}\left(\frac{E_X}{m_\mathrm{p}c^2}\right)^n \tag{2}$$

となる．ここで，m_{p} は陽子の質量，n は自然数でその値が最も小さい崩壊過程が支配的になる*1)．

複数のエネルギースケールが絡む場合も，同様に見積もることができる．例えば，2 つのスケール E_X と E_{s} が関与する場合，

$$\tau_{\mathrm{p}} = \frac{\hbar}{m_{\mathrm{p}}c^2}\frac{E_X^{n-m}\cdot E_{\mathrm{s}}^m}{(m_{\mathrm{p}}c^2)^n} \qquad (3)$$

である．ここで，$n > m > 0$ である．

(2), (3) より，τ_{p} の値を見出すことが次の課題となる．

7. 陽子の寿命と安定性

神岡での実験により，陽子の寿命は 10^{34} 年以上であることが知られている．この値は宇宙年齢 137 億年（1.37×10^{10} 年）よりもはるかに長い．ここで，粒子の寿命とは平均寿命のことである．速く崩壊するものもあれば，そうでないものもある．時刻 $t = 0$ で粒子が N_0 個であったとき，時刻 t での粒子数 $N(t)$ は粒子の寿命 τ を用いて，$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ で与えられる．粒子を十分多く集めれば，観測時間内に崩壊する粒子の数が増え，データの信頼性が増す．神岡での実験は，このような性質を使っている．

では，なぜ陽子はこんなに安定なのだろうか？粒子の安定性の理由を保存則に求めることができる．例えば，電子は電荷を持つ最も軽い粒子で，エネルギーの保存則および電荷の保存則が厳密に成り立つため自然に崩壊することはない．同様にして，陽子はバリオン数を持つ最も軽い粒子で，バリオン数の保存則が高い精度で（近似的に）成り立っていると考えられる．

8. 大統一理論に基づく考察

5 節で述べたように，正面から課題に立ち向か

*1) エネルギーの次元を持つ量として，$m_{\mathrm{p}}c^2$ と E_X を選んだ．次元解析に基づく一般形は，$\tau_{\mathrm{p}} = \frac{\hbar}{m_{\mathrm{p}}c^2}F(E_X/m_{\mathrm{p}}c^2)$ である．(2) では，陽子崩壊は質量 E_X/c^2 を有する粒子を媒介にして摂動論的な効果として生じると仮定した．

うためには，まず，クォークとレプトンの統合を実現するような理論を構築する必要がある．ゲージ原理に基づいて，**大統一理論**と呼ばれる理論が提案されている[3,4]．標準模型のゲージ群 $G_{\rm SM}$ を部分群として含む単純群に基づく理論により，3つの相互作用の統一が実現する．同時に，物質粒子の関する（部分的な）統合が実現する．具体的には，$SU(5)$ の下で各世代の物質粒子は $\bar{\mathbf{5}}$ 表現と $\mathbf{10}$ 表現に収まる．

$$\bar{\mathbf{5}} \supset (d_R)^c + l_L \ , \tag{4}$$

$$\mathbf{10} \supset q_L + (u_R)^c + (e_R)^c \ . \tag{5}$$

$SO(10)$ に基づく理論においては，各世代の物質粒子は $\mathbf{16}$ 表現に丸ごと収まる．

$$\mathbf{16} \supset (d_R)^c + l_L + q_L + (u_R)^c + (e_R)^c + (\nu_{eR})^c \ . \tag{6}$$

このようなクォークとレプトンの統合は，アイソスピンによるpとnの統合と同じアイディア「対称性に関する多重項の下での統合」に基づいている．標準模型における基本粒子のゲージ量子数の違いは，E_X での対称性の破れに伴い後天的に生じる．つまり，標準模型の世界の秩序は，対称性の破れの賜物（たまもの）と考えられる．

E_X において，ゲージ対称性の統一によりゲージ結合定数の間に次のような関係が成り立つ．

$$g_s = g = \sqrt{\frac{5}{3}} g' \bigg|_{E_X} = g_U \ . \tag{7}$$

ここで，g_s, g, g' は，それぞれ，$SU(3)_C$, $SU(2)_L$, $U(1)_Y$ のゲージ結合定数である．ゲージ結合定数は量子補正を受けて，エネルギーとともに変化する．g_s, g, g' の値は $M_Z c^2 = 91.2\,\mathrm{GeV}$ で精密に測定されているので，これらの実測値に基づいて，ゲージ結合定数が統一する模型を構築すれば，E_X の値を理論的に予言することができる．これが，6節で提示した方法 (A) に相当する．例として，標準模型に超対称性を加えて，最も単純な形で拡張した模型において，$E_X = 2.1 \times 10^{16}\,\mathrm{GeV}$ である．図1はその概略を表している．図1で，$\alpha_3 \equiv \frac{g_s^2}{4\pi}$, $\alpha_2 \equiv \frac{g^2}{4\pi}$, $\alpha_1 \equiv \frac{5}{3}\frac{g'^2}{4\pi}$ である．超対称性とは，ボソンとフェルミオンの入れ換えに関する対称性である．弱いスケールの安定性を保証し，ゲージ階層性を実現するために，標準模型の粒子のスーパーパートナー（超対称性変換により移る相棒）の質量を $M_{\rm s} = O(10^3)\,\mathrm{GeV}/c^2$ と仮定した．

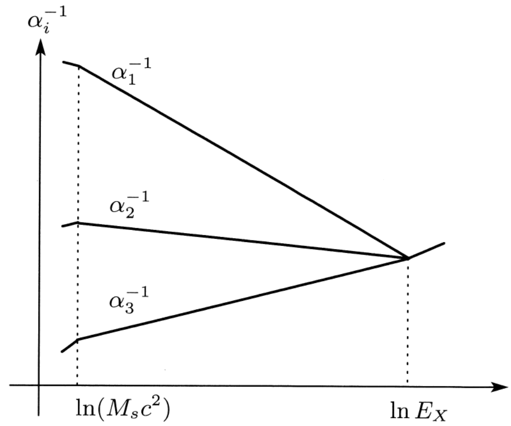


図1　ゲージ結合定数のエネルギー依存性．

ゲージ結合定数の統一から導かれた E_X の値が，陽子崩壊の実験と矛盾しないかどうか検証する必要がある．大統一理論にはバリオン数の保存則を破る相互作用が存在し，一般に陽子崩壊を予言する．陽子崩壊に寄与する過程は模型に依存する．例えば，$SU(5)$ に基づく大統一理論において，クォークとレプトンを相互転換させる相互作用を担う粒子として，X, Y ゲージ粒子が考えられる．これらの粒子は $SU(5)$ 対称性の破れにより，$O(E_X/c^2)$ の質量を獲得する．X, Y ゲージ粒子を媒介にした崩壊過程（$\mathrm{p} \to \mathrm{e}^+ + \pi^0$, e^+ は陽電子）から，陽子の寿命は，

$$\tau_{\rm p} = \frac{C_X}{g_U^4}\frac{\hbar}{m_{\rm p}c^2}\left(\frac{E_X}{m_{\rm p}c^2}\right)^4 \tag{8}$$

と因子化される．ここで，C_X は定数である．超対称性を有する模型においては，カラー荷を有するヒッグス粒子のスーパーパートナー $\tilde{H}_C$（および標準模型の粒子のスーパーパートナー）が陽子崩壊に関与する[5]．$\tilde{H}_C$ の質量も $O(E_X/c^2)$ と考えられる．$\tilde{H}_C$ が関与する崩壊過程（$\mathrm{p} \to \mathrm{K}^+ + \overline{\nu}_\mu$, K^+ は荷電K中間子）から，陽子の寿命は，

$$\tau_{\mathrm{p}} = \frac{C_H}{g_U^4 f_u^2 f_d^2} \frac{\hbar}{m_{\mathrm{p}} c^2} \frac{E_X^2 \cdot (M_{\mathrm{s}} c^2)^2}{(m_{\mathrm{p}} c^2)^4} \qquad (9)$$

と因子化される．ここで，C_H は定数，f_u, f_d は湯川結合定数である．神岡の実験で得られた下限値と $M_{\mathrm{s}} = O(10^3)\,\mathrm{GeV}/c^2$ を使って，(9) から E_X を評価すると $E_X > O(10^{16})\,\mathrm{GeV}$ となり，超対称性に基づく最も単純な模型と相性が悪いことがわかる．これが陽子崩壊の問題「理論の予言に反して，陽子はなぜ安定なのか？」である．

詰まる所，課題の正解を持ち合わせていない．

9. おわりに

「ゲージ原理に基づく美しい理論構造」，「ゲージ結合定数の一致を示唆する精密実験」，「ゲージ階層性を実現する超対称性」などの利点を有しながら，陽子崩壊の問題に直面し，大統一理論の現実性が危ぶまれている．

大統一理論の存在を信じ，陽子崩壊の問題を解決するためには，理論の枠組みの拡張を視野に入れて，陽子の安定性を保障する機構を見出す必要がある．それに向けた様々な試みがなされている．ゲージ対称性の破れの機構として，通常，ヒッグス機構が用いられるが，再検討する余地がある．科学の歴史が物語るように予期せぬところから想像を絶する解答がもたらされる可能性があり，今後の進展が楽しみである．

参考文献

1) 素粒子物理学に関するより詳細な背景知識については，例えば，川村嘉春：『例題形式で学ぶ現代素粒子物理学』，サイエンス社 (2006).
2) 素粒子の性質や実験データについては，Particle Date Group のウェブサイト http://pdg.lbl.gov/ を参照.
3) H. Georgi and S.L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438 (1974).
4) 大統一理論に関する解説については，例えば，川村嘉春：「標準理論から大統一理論へ」，数理科学 2006 年 3 月号特集「〈強い力〉」.
5) N. Sakai and T. Yanagida, *Nucl. Phys.* B**197**, 533 (1982); S. Weinberg, *Phys Rev* D**26**, 287 (1982).

（かわむら・よしはる，信州大学理学部）

小林・益川理論の誕生の裏側と対称性の《破れ》の世界

大貫　義郎

1. ラボラトリー・デモクラシー

益川敏英，小林誠の両氏はそれぞれ1962年および1967年に名古屋大学を卒業して大学院に入学ののち，京都に移るまでの数年間を坂田昌一先生のおられた研究室（正式名称：E研）で過ごした．二人の研究者としての基盤はこの時期に形成されたと言ってよい．それには名古屋大学の物理学教室という特殊な環境が無関係でなかったと思われる．まずそれに触れておく必要があろう．

名古屋大学の理学部は1942年に発足し，坂田先生はこの年の10月に着任した．しかし戦争でスタッフも整わぬまま，疎開先の長野県富士見村で終戦を迎える．先生は戦災で住宅を失い翌年までここに滞在するが，その間，いわゆる“混合場の方法”（と後で呼ばれた）の可能性ついての検討を重ねている．それは，いくつかの場を共存させ，それらの相互関連の下に場の量子論の宿阿ともいうべき「発散」を相殺させようというものであった．しかしこれと平行して，バーナルの『科学の社会的機能』などを参考にしつつ，戦後の物理教室のあり方についての構想を練っておられたようである．その主要な目標は，大学の老化をいかにして防ぎ，またいかにして研究のアクティヴィティを向上持続させるかにあった．内容の詰めは先生の提案の下に何人かの起草委員によって行われ，「物理学教室憲章」として翌1946年に制定された．いわばこれが名大物理学教室の憲法である．規約とせず憲章としたのは，形式でなく精神が大切であるという高林武彦先生（当時，助手）の意見によるという．

その要点は，物理教室の運営はラボラトリー・デモクラシーに基づくというものであった．まず教授を頂点とする講座制が廃止され，研究グループを単位とする研究室（ラボラトリー）が設けられた．各研究室での研究内容や運営等は，所属のメンバーからなる研究室会議で議論され，いわば研究室の意志決定はここでなされることになる．研究室の規模は決まっておらず，極端な場合はメンバーが一人だけのワンマン・ラボラトリーも可能であるし，2つの研究室に一人が所属することも可能である．ただし，研究室の設立や改廃は物理学教室の最高決議機関である教室会議で認められなければならない．教室会議は研究員から構成され，彼らは研究面においてすべて同等の権利と義務をもつ．いわば草の根民主主義で，例えば若者は博士課程に入ったのちの適当な時期に研究室会議の決定を経て教室会議に申請され，出席者全員の投票により研究員と認められるが，実際には博士課程のほとんどは研究員であった．とくに人事，予算配分等の重要事項の決定には教室会議出席者の2/3以上の賛成を要し，その際すべてにおいてスタッフと院生の区別はない．一人1票である．

因習にとらわれた大学の多かった当時おいて，これは画期的なことと言ってよい．このような制度が比較的容易に現実化できたのは，名古屋大学が若かったことに加え敗戦後の民主主義高揚の時期が重なっていたこともあったかと思う．

ともあれこの制度のもたらした自由な雰囲気は，教室のアクティヴィティを高めるとともに，若者を鼓舞する上でも大いに力があった．益川氏も小林氏もそれぞれの学問形成の上でこれの果たした役割の少なくなかったことを回顧している．

2. 模型と実体

くりこみ理論は1950年前後に成立したが，そこでは計算に現れる発散量を有限値で置き換えるという人為的操作を施すために，これは暫定的な理論という見方が有力であった．しかもこの手法が適用できない相互作用が自然界には存在すると考えられたので，むしろ初めから発散を含まぬ理論をつくろうという試みが海外を含めて種々行われた．しかし多くの努力が払われたにも関わらず，すべて不成功に終わって万策尽きた感があり，場の理論の将来についてはペシミスティックな空気が国際的にも濃厚であった．1950年代から70年代の初めにかけてのことである

そのため例えば我が国では，湯川秀樹先生は早くから非局所場理論を提唱し，またあとには素領域理論の可能性を探るなど，微小な時空領域における物理法則の根本的な変革を意識的に考察した．また坂田先生は場の理論の革命は必至であるとし，現在の理論の背後には超量子力学とも言うべき新理論が存在するかも知れず，そこに至る過程での，素粒子模型やそれを構成する実体の重要性を強調した．坂田模型や名古屋模型はこのような視点を含めて提案されたと言ってよい．さらに当時は，くりこみ可能性を理論構築の指導原理にすべきではなく，くりこみ不可能な理論こそ時空間の微小領域における場の理論の矛盾を顕在化するもので，それの分析を革命への手がかりにできないかという意見もあった．いずれにせよ局所場の理論に対する不信は甚だ強かったのである．

しかし事態はそれほど単純ではなかった．局所場の理論は装いを新たにしてしぶとく生き残るのである．それを象徴する代表的なものは1960年初頭に提出された南部陽一郎先生の“対称性の自発的な破れ”の理論ということができよう．いわば場の理論の全く新しい可能性の指摘であるが，長いこと最大の課題としてきた「発散」についての解決を示すものでなく，従って当時これが我が国でたちどころに広く評価される状況には至らなかったように思う．その理論的な掘り下げの多くは，むしろ海外でなされたといってよい．

対称性の自発的な破れは，場の無限に多くの自由度に由来する新しい性質の発現を意味し，その物理的内容は真空の構造とも関連して非常に豊富なことが分かってきた．とくに“ゲージ理論”との結合は，人々の微視的世界に関する視野を一変させるものであった．この予想を越えた展開は，後から見れば，超量子力学への革命ではなく，むしろ場の理論の正統的な発展であったと言える．

益川・小林両氏を含む一部の若い世代は，年配者の考えとは別にこれらの新しい流れを注目していった．そのような柔軟性は若者の特権であると同時にやはり研究室の自由な雰囲気にもよったと思う．

1967–68年，電磁および弱い相互作用の統一模型としてワインベルグ・サラム（Weinberg–Salam）理論が現れる．これは“ゲージ理論”と“対称性の自発的の破れ”を基盤にしたものであるが，ここで仮定された粒子が実験で確認されにおよび無視することのできぬものとなった．しかもこの模型ではくりこみの処方の適用できることが示され，その結果，以前の議論に反して，くりこみ可能ということの大切さが浮き彫りにされたと言える．

他方，弱い相互作用は極めて微弱ながら時間反転の不変性（CP不変とも言われる）を破っていることが1960年代にすでに実験で分かっていた．しかしワインベルグ・サラムの理論はこれを記述していない．よく知られているように益川・小林の両氏はこの問題に正面から挑戦し，クォークの種類を6個にすればそれが可能であることを発見して，その相互作用の一般形を確立したのである．未知の粒子の導入は，大変勇気のいることである．恐らくそれを比較的容易に可能にしたのは，かつてしばしば議論された素粒子物理における模型とそれを担う実体の重要性が，無意識のうちにも感覚として彼らの心底にあったからかも知れない．

（おおぬき・よしお，名古屋大学名誉教授）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

今井　秀樹

1980年12月号

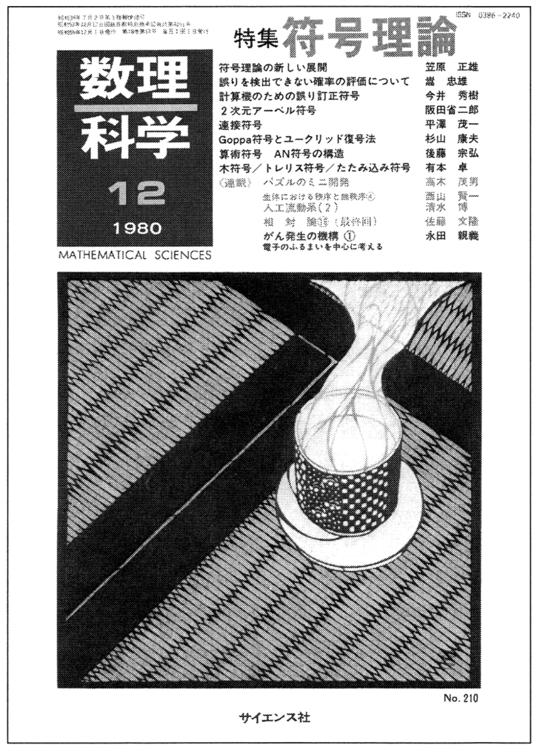
1980年12月号の符号理論特集号に「計算機のための誤り訂正符号」という記事を書いたとき，筆者は30年後の符号理論について，深く考えてはいなかった．ただこの理論の究極の目標「シャノンによって与えられた通信・記録における信頼性向上の限界を達成する実用的符号の構成」は30年程度で実現されることはなく，符号理論は坦々と進展すると思っていた．しかし，その後，符号理論が辿った道は筆者の予想をはるかに超え，波乱に満ちたものであった．

第一の波は実用化の大波である．誤り訂正符号の計算機への応用やコンパクトディスク（CD）への応用が契機となり，1980年前後から符号理論の通信・記録システムへの応用が急速に拡大していった．この新たな応用を探る過程の中で，新しい研究分野もいくつか生まれた．最も成功したのは，信号の変調と誤り訂正符号化を一体化し最適化を図る符号化変調の分野である．

応用が進展する一方で，CDに用いられたリード・ソロモン符号などの代数的符号を高度化した代数幾何符号の理論も多くの研究者の関心を集めた．符号理論の主役であった「代数的符号理論」は幾何学の助けも借りて，より深く豊かなものとなったのである．

しかし，1993年に第2の大波が襲ってきた．ターボ符号の提案である．これはシャノンの限界に迫る実用的な符号として初めてのものであった．それまで長い間「人が実用化できる符号はシャノンの限界に達しない」という俗説が流布していただけに，ターボ符号発明のインパクトは極めて大きかった．これはまた，符号理論の主役を代数的符号理論から，確率論を基盤とする「確率的符号理論」へ変えていくことにもなった．

ターボ符号は繰り返し復号を行うことによって，その高い性能を達成する．この考え方は実は，1963年に低密度パリティ検査符号（LDPC符号）の復号のためにギャラガーによって既に提案されていたが，その当時のコンピュータではこのような復号は実際上不可能であったため，それが注目されることはなかった．しかし，ターボ符号の出現によりLDPC符号も再評価され，シャノンの限界に迫る符号として現在の符号理論の最も重要な研究対象となり，実用化も進んでいる．



この30年間，符号理論は大きく変わり，その主役が交代し，シャノンの限界に迫る符号も見出された．しかし，これで終わりではない．実際の通信・記録システムは極めて多様で複雑ある．そのようなシステムに対し，高信頼性ばかりではなく様々な機能を持つ符号が要求されるようになってきた．それに対処し得る符号を探る中から，符号化変調がそうであったように，新たな研究分野が生まれてくるであろう．そして，第3の大波となるような新しい原理に基づく符号が現れることを期待したい．

（いまい・ひでき，中央大学理工学部，
産業技術総合研究所情報セキュリティ研究センター）

リレー連載

現象から方程式を創り出す

第11回 —立式で鍛える論理的思考法—

ボルツマン方程式

ミクロとマクロをつなぐ

鵜飼 正二

1. はじめに

ボルツマン方程式は1872年にL. ボルツマンが導いた気体の運動方程式である．彼の目的は当時完成をみた熱力学のニュートン力学的基礎を構築することにあった．熱力学は観測や実験事実から演繹された経験則であり，熱現象の定量的，定性的取扱いに関して大きな役割を果たすが，しかし，熱とは何か，温度とは何かという根源的な問いに答える理論ではない．

しかし当時は既にすべての物理現象は物理学の基本原理により記述されねばならないという信念（principle of the first principle）が広く受け入れられており，熱力学の基本原理をニュートン力学に基づいて構築しようという試みはごく自然なものであった．

ボルツマンの出発点は**気体分子運動論**である．これは気体が互いに衝突を繰り返している多数の粒子からなり，気体の巨視的性質はその総体的な運動で説明ができるとするものである．このアイデアは18世紀に既に萌芽が見られるが，19世紀に入り原子の存在こそまだ実証されていなかったが原子論が新しいパラダイムとして認知され，熱は粒子の運動に他ならないという熱運動説が広く支持されるようになるに伴い，説得力を持つようになっていた．

このアイデアがニュートン力学と相性が良いのは明らかであろう．原理的にはすべての粒子の位置と速度をニュートンの運動方程式から求めれば気体の微視的状態が得られる．しかし解くべき方程式の個数は膨大（アボガドロ定数）であり，解くことはおろか，それと同数の初期データを用意することは実行不可能である．しかし多数の粒子が衝突を繰り返すと個々の粒子は個性を失い，確率論的あるいは統計的な扱いが意味をもつ．

ボルツマンが着目した統計量は1粒子位相空間における気体の密度分布である．古典的な密度分布は実空間での統計量であるが，位相空間では粒子速度というミクロの情報を含めることができる．

2. ボルツマン方程式

時刻 $t \in \mathbb{R}$ に位置 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$，速度 $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ を持つ気体粒子の密度分布を $f(t, x, v)$ で表すことにする．これは1粒子位相空間 $\Lambda = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の任意の部分領域 G について，積分

$$\iint_G f(t, x, v)\, dx dv$$

が時刻 t に領域 G に存在する粒子の総質量（の

統計的平均値）を与えることを意味する．f は個数密度または確率密度とも解釈できる．

ボルツマンが導いたのは f を未知関数とする次の方程式である．ただし粒子の質量は1とする．

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\cdot\nabla_x f+\nabla_v\cdot(\vec{F}f)=\frac{1}{\kappa}Q(f). \quad (1)$$

ここで ∇_x, ∇_v はそれぞれ変数 x, v に関する勾配，$\cdot$ は3次元ベクトルの内積である．$\vec{F}(t,x,v)=(F_1,F_2,F_3)$ は粒子に働く外力（3次元ベクトル値関数）である．左辺第2項と第3項はこの外力の下での粒子の移動を表し輸送項と呼ばれる．また右辺 Q は粒子どうしの衝突を記述する項で次式で与えられる．

$$\begin{aligned}Q(f)&=\int_{\mathbb{R}^3_{v_*}}\int_{\mathbb{S}^2_+}B(|v-v_*|,\cos\theta) \qquad (2)\\&\qquad\times\{f(v'_*)f(v')-f(v_*)f(v)\}dv_*d\sigma,\\v'&=v-[(v-v_*)\cdot\omega]\omega, \qquad (3)\\v'_*&=v_*+[(v-v_*)\cdot\omega]\omega,\\\mathbb{S}_+&=\{\omega\in\mathbb{S}^2\mid(v-v_*)\cdot\omega>0\},\\\cos\theta&=\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\omega.\end{aligned}$$

ここで，$f(v)$ などは $f(t,x,v)$ などを意味し，変数 t,x は共通なので省略している．B は粒子間の相互作用により定まる非負値関数で**衝突断面積**と呼ばれるものである．κ は衝突の平均自由行程（時間）と呼ばれ，流体力学的極限を考える際の重要な物理パラメータである．詳しくは文献1)参照．

3. 直感的導出

ボルツマンの導出方法は，今日，発展方程式を導出するため広く使われているバランス方程式の考え方の先駆けとなったものである．彼は領域 G に流入・流出する粒子数を数え上げた．まずその時間的変化率が

$$\frac{d}{dt}\iint_G f dxdv=C_{輸送}+C_{衝突}. \qquad (4)$$

なる2つの項の和で書けるとした．第1項は外力に従って運動している粒子のうち，単位時間に G に流入する個数であり

$$C_{輸送}=-\iint_{\partial G}f(t,x,v)\vec{n}(x,v)\cdot\vec{V}(t,x,v)dS$$

と計算できる．ここに ∂G は領域 G の境界，$\vec{n}(x,v)$ はその外向き単位法線ベクトル，$\vec{V}(t,x,v)$ は位相空間 Λ での粒子の移動速度，dS は境界上の速度である．これは ∂G 上の面積要素 dS を底面，中心軸が $\vec{V}$ である斜円柱の体積が，$\vec{n}\cdot\vec{V}dS$ であること，これに f を乗じると dS を単位時間に $\vec{V}$ 方向に通過する粒子の質量であることからわかる．速度 $\vec{V}$ はニュートン方程式により，

$$\vec{V}(t,x,v)=\frac{d}{dt}(x,v)=(v,\vec{F}(t,x,v))$$

となる．したがってガウスの発散定理により

$$\begin{aligned}C_{輸送}&=-\iint_G \mathrm{div}_{x,v}(\vec{V})fdxdv\\&=-\iint_G\left[\nabla_x\cdot(vf)+\nabla_v\cdot(\vec{F}f)\right]dxdv.\end{aligned}$$

負符号は $\vec{n}$ が外向き方向だからである．

ここまではニュートン力学しか使っていないが $C_{衝突}$ の計算には統計的考察が必要である．$Q=Q^+-Q^-$ と分解すると

$$\begin{aligned}C_{衝突}&=C^+_{衝突}-C^-_{衝突}\\&=\frac{1}{\kappa}\iint_G Q^+dxdv-\frac{1}{\kappa}\iint_G Q^-dxdv\end{aligned}$$

と書ける．これと $C_{輸送}$ を(4)に代入すると G の選び方が任意であることから(1)を得る．

$C_{衝突}$ は弾性衝突の結果，単位時間あたり G 内で生成（+），消滅（−）する速度 v の粒子数を与えている．実際 Q^- の被積分関数に現れる積

$$f(t,x,v)f(t,x,v_*) \qquad (5)$$

は速度 v の粒子のうち速度 v_* の粒子と衝突する個数に関係した量である．同様に Q^+ に現れる積

$$f(t,x,v')f(t,x,v'_*) \qquad (6)$$

は速度 v' と v'_* の粒子の衝突結果生じる速度 v の粒子数に関係した量である．弾性衝突のみを考える．(3)が衝突の前後の速度を与える力学的関係

式である．これは衝突前後に成り立つ粒子の運動量および運動エネルギーの保存則

$$v'+v'_*=v+v_*, \quad |v'|^2+|v'_*|^2=|v|^2+|v_*|^2$$

を解いて得られる一般解で，パラメーター $\omega\in\mathbb{S}^2$ によるパラメーター表示である．(5) と (6) は衝突する 2 つの粒子は確率論の意味で互いに独立であるという仮定であり，ボルツマンはこれを**衝突数の仮定**と呼んだ．ボルツマン方程式の中心となる統計的仮説で現在では**分子混沌**（molecular chaos）**の仮説**と呼ばれている．この仮定が物理的に正しいかどうかは未だに大きな問題である．

4. *H* 定理

ボルツマンは方程式 (1) から熱力学の第 1 法則と第 2 法則が導けると主張した．簡単のため外力はないとする．方程式 (1) の両辺に $|v|^2$ を乗じ x,v に関して Λ 上で積分する．解 f が x,v の遠方で十分早く 0 に収束する関数とすると，左辺の輸送項の積分はガウスの発散定理により 0 となる．また定義 (2) を考慮し若干の計算を行うと右辺の Q を含む積分も 0 となることが分かる．すなわち，

$$\frac{d}{dt}\iint_\Lambda |v|^2 f(t,x,v)dxdv=0$$

を得る．ここに現れる積分は気体の全エネルギーに比例するから，これは**熱力学第 1 法則（エネルギー保存則）**を意味する．$|v|^2$ の代わりに $1, v_i(i=1,2,3)$ と置いても同じ計算ができ，それぞれ全質量，全運動量の保存則を得る．

今度は (1) の両辺に $\log f$ を乗じて積分する．密度分布は非負関数なので $f\log f$ は意味を持つ．ガウスの発散定理と Q の定義により

$$\frac{dH(t)}{dt}+D(t)=0,$$
$$H(t)=\iint_\Lambda f\log f dxdv,$$
$$D(t)=\iint_\Lambda B\{f(v'_*)f(v')-f(v_*)f(v)\} \times\log\frac{f(v'_*)f(v')}{f(v_*)f(v)}dxdv$$

を得る．初等的不等式 $(a-b)\log(a/b)\geq 0$ $(a\geq b>0)$ から $D\geq 0$，ゆえに $dH/dt\leq 0$ が従う．ボルツマンはこれを ***H* 定理**と名づけ，積分 H を ***H* 関数**と呼んだ．H 関数はボルツマン自身が統計力学で導入したエントロピーにマイナスを付けたもので，**熱力学第 2 法則（エントロピー増大の法則）**を意味する．

さらに $t\to\infty$ のとき $f(t,x,v)$ がある極限に収束したとすると，当然 $\dot{H}(\infty)=0$，したがって $D(\infty)=0$ である．極限関数を M とするとこれは

$$M(v'_*)M(v')-M(v_*)M(v)=0$$

を意味する．ボルツマンはこの関数方程式を解き有名な**マクスウェル分布**

$$M(v)=\frac{\rho}{(2\pi T)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{|v-u|^2}{2T}\right\}$$

を得た．これは密度 $\rho>0$, 流速 $u=(u_1,u_2,u_3)$, 温度 $T>0$ の平衡気体の速度分布関数で，マクスウェルがボルツマン方程式に先立ち 1859 年に統計学的考察により導いたものである．明らかに $Q(M)=0$ が成り立つので ρ,u,T が t,x に依らない定数ならば M はボルツマン方程式の平衡解である．すなわち平衡状態はマクスウェル分布以外にあり得ないこと，マクスウェル分布はボルツマン方程式に埋め込まれていることを意味する．

これより，ボルツマンは熱力学のニュートン力学的基礎を築いたと主張した．しかしこれに対して多くの反論が提起され，ボルツマンとの間で激しい論争が繰り広げられたことは科学史上の有名な挿話である．ロシュミットはニュートン力学は時間反転性を持つが H 定理は時間反転性を持たないこと，ツェルメロは H 定理がポアンカレの保測力学系に関する再帰性定理と矛盾すると説いた．

しかしボルツマンの導出には力学的考察だけでなく，統計的概念も使われている．したがって後者がどのような，またどの程度の影響持つかを明らかにすることは大きな意義を持つ．

5. ボルツマン–グラッド極限

これを明らかにすべく1949年にグラッドは図1のスキームを提案した．1975年にランフォードがこのスキームの数学的証明を与え，最終的のボルツマンの正当性を保障した．

まず気体はニュートン力学に従って運動している個数 N，直径 σ の剛体球とする．球 i の中心座標と速度をそれぞれ $x_i, v_i \in \mathbb{R}^3$ とする．剛体球は互いに重なれないので我々の力学系の位相空間は

$$\Lambda_{N,\sigma} = \big\{ z^{(N)} = (z_1, \cdots, z_N) \mid z_i = (x_i, v_i) \in \mathbb{R}^6, |x_i - x_j| > \sigma (i \neq j) \big\}$$

である．外力 F は0とすると，$\Lambda_{N,\sigma}$ の内部で**ニュートン方程式** $\dot{x}_i = v_i, \dot{v}_i = 0$ が成り立つ．直線軌道である．この軌道が $\Lambda_{N,\sigma}$ の境界に達したところで粒子間衝突が起こる．境界点 $|x_i - x_j| = \sigma$ で剛体球 i と j が衝突する．これは弾性衝突であり，衝突前と衝突後の速度の関係は (3) で決まることが初等的な力学的考察から示せる．これはニュートン方程式の境界条件であり，したがって軌道は不連続な折れ線である．

次に N 粒子結合確率密度関数

$$P_{(N,\sigma)}(t, z^{(N)})$$

を導入する．これは無限個の同一の力学系に異なる初期分布を考えることを意味し，気体に確率的振舞いを仮定したわけではない．この密度関数は軌道に沿って一定である．したがって，$\Lambda_{N,\sigma}$ の内部では**リウビル方程式**

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{(N,\sigma)} + \sum_{i=1}^{N} v_i \nabla_{x_i} P_{(N,\sigma)} = 0 \tag{7}$$

を満たし，境界上では (3) で決まる境界条件を満たす．この1階線形偏微分方程式の特性方程式はニュートン方程式に他ならない．

さらに k 粒子周辺確率密度関数

$$P_{(N,\sigma)}^{(k)}(t, z^{(k)}) = \int P_{(N,\sigma)}^{(k)}(t, z^{(k)}, z^{(k)\prime}) dz^{(k)\prime},$$
$$z^{(k)} = (z_1, \cdots, z_k),$$
$$z^{(k)\prime} = (z_{k+1}, \cdots, z_N), \quad k = 1, \cdots, N$$

を考える．方程式 (7) を $z^{(k)\prime}$ に関して積分すると $N-1$ 個の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{(N,\sigma)}^{(k)} + \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot \nabla_{x_i} P_{(N,\sigma)}^{(k)} = N(N-1)\sigma^2 Q_\sigma^{(k+1)}(P_{(N,\sigma)}^{(k+1)}) \tag{8}$$

を得る．ここで $Q_\sigma^{(k+1)}$ は $P_{(N,\sigma)}^{(k+1)}$ に作用する線形積分作用素で，N には依らない．正確な形と導出方法は複雑なので省略する．(7) と合わせ N 元連立方程式を得る．これは**BBGKY ヒエラルキー**と呼ばれニュートン，およびリウビル方程式と同値である．

今，a_0 を正数として

$$N \to \infty, \quad \sigma \to 0, \quad N\sigma^2 \to a_0 \tag{9}$$

なる極限を考える．これはボルツマン–グラッド極限と呼ばれる．この極限の下で

$$P_{(N,\sigma)}^{(k)}(t, z^{(k)}) \to f^k(t, z^{(k)})$$

が成り立つとする．(8) の極限は

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(k)} + \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot \nabla_{x_i} f^{(k)} = a_0 Q_0^{(k+1)}(f^{(k+1)}), \quad k = 1, 2, \cdots \tag{10}$$

となる．これは無限個の方程式系で**ボルツマンヒエラルキー**と呼ばれる．

最後にすべての粒子は確率論の意味で互いに独

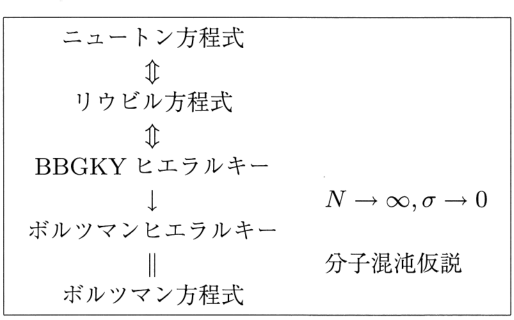


図1　ボルツマン–グラッド極限．

立と仮定する．すなわち，

$$f^{(k)}(t, z^{(k)}) = \prod_{i=1}^{k} f^{(1)}(t, z_i) \tag{11}$$

がすべての $k = 1, 2, \cdots$ に対し成り立つと仮定する．k 粒子周辺確率密度 $f^{(k)}$ は 1 粒子確率密度 $f^{(1)}$ に因数分解できると仮定するのである．ボルツマンの仮定 (5), (6) は $k = 2$ の場合であるが，ここではすべての k について仮定するのである．このとき (10) はどの k についても $f^{(1)}$ の同一の方程式に帰着すること，しかもその共通の方程式は $\kappa = 1/a_0$ としたボルツマン方程式 (1) に他ならないことが示される．

ここでボルツマン方程式は希薄気体の方程式であることに注意しておく．実際，剛体球の全表面積 $N\sigma^2 = a_0$ は衝突断面積を与え，全体積は $N\sigma^3$ であるので，極限 (9) では衝突は残るが体積 0 の気体となる．

6. ランフォードの定理

以上は形式的議論であるが，ランフォードは (8), (10), (1) に対する 3 つの初期値問題を比較し次の定理を証明した．

定理　初期値の属す関数空間を適当に決めると，次の性質を持つ正数 T^* が存在する．

[1]　各初期値問題は共通の時間区間 $[0, T^*]$ で一意な解を持つ．各解は初期値と同じ関数空間に属す．初期値と対応する解を

$$P_{N,\sigma,0}^{(k)}(z^{(k)}), \quad f_0^{(k)}(z^{(k)}), \quad f_0^{(1)}(x, v),$$

$$P_{N,\sigma}^{(k)}(t, z^{(k)}), \quad f^{(k)}(t, z^{(k)}), \quad f^{(1)}(t, x, v)$$

と書く．

[2]　すべての k について，極限 (9) で初期値が収束

$$P_{N,\sigma,0}^{(k)}(z^{(k)}) \to f_0^{(k)}(z^{(k)})$$

すれば解は時間区間 $[0, T^*]$ で収束する．

$$P_{N,\sigma}^{(k)}(t, z^{(k)}) \to f^{(k)}(t, z^{(k)}).$$

[3]　分子混沌仮説 (11) が $t = 0$ で成り立つ，すなわち初期値が

$$f_0^{(k)} = \prod_{i=1}^{k} f_0(x_i, v_i)$$

を満たせば，時間区間 $[0, T^*]$ で (11) が成り立つ．

この定理の証明には多くの数学的手法が必要だが詳細は割愛する．この定理の最も重要な物理的帰結は，ボルツマン方程式の導出に必要な分子混沌仮説は初期時刻でのみ仮定すれば十分であるということである．ボルツマン方程式自身は純然たる偏微分方程式であるが統計的性質である分子混沌性を伝播させる性質を備えているのである．

この伝播性は時間区間 $[0, T^*]$ で成り立つが，ランフォードの証明では $T^* \sim \kappa/3 \sim 1/3a_0$ という非常に小さいオーダーである．より大きな T^* を与える証明が待ち望まれている．

7. 数学的諸問題

現在，ボルツマン方程式は非線形偏微分方程式論の 1 つの大きな研究テーマになっている．その中で特に初期値問題の解の**時間大域的存在定理**の研究が活発行われてきた．ボルツマン方程式は非線形方程式であるので大域解の存在は自明でない．他方ボルツマンによる H 定理の証明は時間大域解の存在を前提としている．しかし彼の時代にはボルツマン方程式はおろか一般の偏微分方程式の解の存在理論は未発達であった．したがって時間大域解が存在するための条件を明らかにできれば H 定理が成り立つ条件が明らかになり，物理的にも大きな意義がある．

ボルツマン方程式の大域解存在理論は 1932 年のカーレマンによるものが最初である．しかし彼が扱ったのは解が空間変数 x に依存しない空間一様の場合であった．ちなみにナヴィエ–ストークス方程式の弱解についての有名なルレイの研究が現れたのはそれより遅く 1934 年のことである．

物理的により現実的な空間非一様の場合の研究はずっと後になり，1960 年代のグラッドによる時間局所解の構成に始まるが，1970 年以降大域解の研究が盛んになり大きな進歩を遂げた．大きく分けて，これまでに全く異なる 3 つの手法が開発された．

(1) **スペクトル解析法**
　(Ukai 1974, $\cdots$)
(2) **繰り込み解理論**
　(Diperna–Lions 1989, $\cdots$)
(3) **マクロ–ミクロ分解法**
　(Liu–Yang–Yu, Guo, 2004, $\cdots$)

一般に非線形方程式の時間大域解の証明には方程式の消散性が大きな役割をはたす．H 定理はボルツマン方程式の消散性を表しているが，存在定理の証明に直接使えるほど強い消散性ではない．上記 3 つの方法の違いはこの弱い消散性からいかに強い性質を引き出すかにある．その研究から次々と技術革新が産み出され非線形偏微分方程式論の発展に大きく貢献してきた．(2) にはフィールズ賞が与えられた．また本年 8 月の ICM では 2 人目のフィールズ賞受賞者が出た．30 年の長きにわたり多様な技術革新を生み出してきたことはボルツマン方程式が豊かな数学的内容と研究の更なる発展の可能性を秘めていることの証である．実際，最近，Q が**擬微分作用素論**や**調和解析**と関係した深い性質を持つことが明らかとなってきており，新しい研究方向が生まれつつある[2)]．

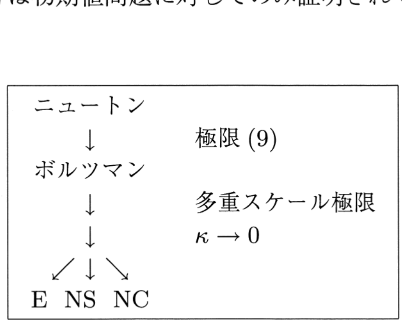
8. ミクロとマクロをつなぐ

流体の運動を記述する方程式は古くから数多く知られている．有名なものは言うまでもなく**オイラー**および**ナヴィエ–ストークス方程式**であるが流体の圧縮性や熱伝導性を考慮するか否かで数学的には全く異なるタイプの方程式になる．これらは流体を連続体と見做した**マクロスケール**での運動方程式であるが，反対にミクロな粒子の集まりと考えるとニュートン方程式は**ミクロスケール**の流体方程式である．ボルツマン方程式はその中間の**メゾスケール**の運動方程式である．メゾスケールの選び方は一意的ではない．古典的な実空間の次に構造の簡単な 1 粒子位相空間を選ぶことによりボルツマン方程式と気体運動論の手法はマクロとミクロの現象をつなぐモデル理論として理論上も応用上も大きな成功を収めてきた．

その 1 つに**多重スケール理論**がある．流体力学の様々なタイプの方程式は流体の性質の異なる側面の反映であるがそれらの物理的有効性の範囲を明らかにすることは流体力学の古くからの問題であった．近年多重スケール解析の発展によりその有効範囲が数学的に明らかにされつつある．図 2 にその概略を示す．多重スケール解析とは同一の方程式の各項に異なるスケーリングをほどこし異なる極限方程式を導く手法である．

ボルツマン方程式では平均自由行程 k の異なる冪をスケーリングに使う（冪の選び方は文献3) 参照）．極限 (9) も N, σ による多重スケーリングである．各収束条件が各方程式の有効性範囲を与える．またこの図はオイラー，およびナヴィエ–ストークス方程式のニュートン力学による数学的正当性をも保証している．これまでそのような正当化は観測・実験に基づく直感的考察でのみ行われてきた．さらに，古典流体力学には現れない新しい流体方程式を導くことができるようになったことも多重スケール解析の 1 つの効用である．

図 2 は初期値問題に対してのみ証明されており，



E: オイラー方程式
（圧縮性，非圧縮性）
NS: ナヴィエ–ストークス方程式
（圧縮性，非圧縮性，熱伝導性）
NC: 非古典的流体方程式
（Ghost 効果，粘性加熱）

図 2 多重スケール解析．

境界値問題についてはほとんど何の証明も知られていない．境界層理論と関連して今後の大きな課題である．

またニュートン方程式からマクロな流体方程式を直接（ボルツマン方程式を経由せず）与える極限の存在も大きな未解決問題である．困難は $N\sigma^3 \to v_0 \neq 0$ が必要だが，このとき $N\sigma^2 \to \infty$ となり (10) が意味を持たなくなることにある．

参考文献

1) C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti, Mathematical Theory of Dilute Gases, *Appl. Math. Sci.* **106**, Springer-Verlag (1994).
2) R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang, Regularizing Effect and Local Existence for Non-Cutoff Boltzmann Equation, *Arch. Rational Mech. Anal.*, online 28 Jan. 2010.
3) 鵜飼正二「Boltzmann 方程式と Navier-Stokes 方程式」数学セミナー，2010 年 2 月号，日本評論社．

（うかい・せいじ，東京工業大学名誉教授）



私の微分幾何学者時代

中島 啓

1992～93年頃，私は研究を転換させた．そして，それ以降は，箙(quiver)多様体(variety)をキーワードに，代数幾何と表現論を自分の研究テーマとして，現在に至る．転換前後からの研究の流れは，最近，別のところ[1)]で紹介した．

今回は，それ以前，学生時代から転換点までに，微分幾何学者として勉強したこと，研究したことを紹介したい．それは，今から振り返れば自分の研究スタイルを確立するまでの，いわば研究者としての青春時代のときのことだ．このような私記を書かせていただいて，当時考えていたことを思い出すことは，個人的に楽しいことであるが，もしもいろいろと試行錯誤した経験が，若い読者の方にも役に立てば望外の喜びである．

1. 1984 年春：学部 4 年，セミナーを開始

学部の4年生から，セミナー，今の京大でいえば講究が始まる．学部3年までは代数・解析・幾何の基礎を授業でまんべんなく学んだわけだが，いよいよ専門を決めるわけである．優秀な同級生の河東泰之君，小林俊行君たちは，授業よりずっと先に進んだことをすでに勉強していて，専門を何にするか，明確な意志をもって選んでいた．しかし，私といえば授業についていくのが精一杯で，その先に何があるのか，何も知らない状態であった．だから，授業を受けた印象で自分に合いそうなものを選択するしかなかった．私が選んだのは，微分幾何の落合卓四郎先生のセミナーである．3年の前期にあった多様体の講義，特に微分幾何の初歩のところが面白かった，といえば聞こえがいいが，実のところ代数や，トポロジーの抽象性に食傷気味だったし，解析は何を目指しているのか分からなかった，というのが本当のところだ．それに比べて，幾何は目指すところが具体的である印象をもった．

セミナーを選ぶまでは何も知らなかったのだが，当時の落合セミナーは体育会系[*1)]だった．セミナーを選択した学生が多かったこともあるが，週3コマの通常のセミナーと，それ以外に自主ゼミを2つやるように指導された．その他に4年生向きの講義も取るわけで，脇目も振らずひたすら勉強しなさい，ということだ．またセミナーは完璧な準備をすることが前提とされ，途中で落合先生の質問に答えられないと，その時点でセミナーは中止になり，次回までに答えられるように勉強のし直しとなる．朝から晩までセミナーの準備・発表をして，数学にどっぷりとつかる日々であった．これは，授業で学んだこと以外を知らなかった私

*1) のちに落合先生が日体大の総長となられたとき，驚きはしたが，妙に納得したものである．

には，研究の最先端まで最短距離で到達するためにピッタリの道であった．また，一人で勉強することには慣れていなかったので，年の近い先輩，同級生と一緒に学ぶ自主ゼミも適当だった．

通常のセミナーで読んだのは，Klingenberg の“Riemannian Geometry”で，これは任意のコンパクト・リーマン多様体が閉測地線を無限個持つことを証明するために，閉曲線の全体のなす空間を無限次元の多様体として捉えることを目標とした教科書である．当時，リーマン幾何学を何も知らない状態であったのだが，いきなり無限次元多様体である．しかし，今から振り返ってみると，これは3年生で学んだ多様体論のいい復習になった．通常，多様体の上のベクトル場，微分形式などを定義するときには，座標系を取って議論することが多い．しかし，無限次元であることもあってか，できる限りそうではない定義が与えられていた．細かいことはもう思い出せないが，例えばベクトル場が C^∞ 級関数に働く derivation であるとか，接バンドルの切断であるということは，この本で学んだ気がする．座標系を取って議論するのは，計算するためには必要であるが，概念の意味を理解するのが困難になる．ここを分かるかどうかが，多様体という概念が身につくかどうかのポイントになる．もちろん3年生の授業でも触れられていたが，セミナーの準備のために自分で積極的に勉強することで身についていったし，落合先生も折に触れて，「他人に説明するときに，座標を取った計算を見せるべきではない」と言われた*2)．

自主ゼミで勉強するようにいわれたのは，Gilberg–Trudinger の“Partial differential equations of second order”という，非線形楕円型偏微分方程式の標準的な教科書と，Helgason の“Differential Geometry, Lie groups, and symmetric spaces”の2冊である．ここで，少し当時の微分幾何の状況を少し説明しておいたほうがよいだろう．その当時にはそういうことは分からなかったが，今から考えてみると，幾何学，特に多様体上の非線形偏微分方程式の研究の流れが変わりつつあるときだった．多様体上の非線形偏微分方程式の研究が盛んになったのは，70年代後半の Yau による Calabi 予想の解決の頃からである．その当時の主眼は，多様体上の非線形偏微分方程式の研究が，解が存在することを証明することであった．誤解を恐れず言い切ってしまうと，解が存在することを示せば問題の99%は解けたことになるような研究だった．これは Gilberg–Trudinger で扱われているテーマとぴったり一致する．つまり，ユークリッド空間の開集合上で偏微分方程式を取り扱う代わりに，多様体上で考えるというだけである．しかし，解が存在することがいえると，極めて強力な幾何学的な結論が得られるのが特徴である．Calabi 予想もそうだが，最近 Perelman の仕事により再び脚光を浴びた Ricci 流を Hamilton が考えたのも，この頃の話である．Ricci 曲率が正な3次元多様体は球面の有限群による商であるという有名な結果だ．Ricci 流が時間無限大で，定曲率計量に収束することを証明することによって示されている．Ricci 流は放物型で，楕円型ではないが，非常に近いものである．

それが，1982年の Donaldson によるゲージ理論の4次元トポロジーへの応用により，解の全体のなすモジュライ空間の構造を調べることが重要である，と変わりつつあったのである．偏微分方程式が解けることは，第一歩に過ぎない，と様相が変わってきた．そしてそこには，偏微分方程式だけでなく，トポロジーや代数幾何などの様々な分野からの研究が錯綜した．

以上，先走ってしまったが，Donaldson のゲージ理論の衝撃は，まだまだ微分幾何全体には及んでいなかった．解の存在を示すことが最終目標というスタイルの研究がまだまだ，主流を占めると思われていた．東大では，古田幹雄さんが2年上だが，私が4年生のときは，まだ修士2年で，次々と新しい結果を得られて皆を驚かすのは，1年先

---

*2) そののち，箙多様体（quiver variety）のホモロジー群の上に，リー代数の表現を，生成元と関係式を用いて構成したときに，自分の中で何かが崩壊した．線形空間の基底を取って計算するなんて，座標を取って計算するよりも，ずっとひどい．ところが，この結果はそれ以外の定式化ができないのである．

のこととなる．

で，Gilberg–Trudinger に戻る．この本を読んでよかったことは，もちろん Sobolev 空間や，Schauder 評価など，楕円型偏微分方程式の基本的な事項を学んだこともあるが，それ以上に不等式の取扱いに慣れたことにあると思う．基本的な事項を知らなければ，Yau の論文はもちろん読めないが，かといってあそこで展開されている膨大な計算とたくみな不等式の取扱いを，単に字面だけを追うのではなく本当に理解するためには，かなりの慣れが必要である．これは，他の偏微分方程式でも同様である．Gilberg–Trudinger にある不等式の変形は，最初のうちはかなり丁寧に書いてあるのだが，進むにつれて省略が多くなってくる．きちんと読んでいれば，行間を埋めることはたやすく，また自分に力がついてきたことも実感できた．この力は，その後，論文を書くときにも役に立つことになった．

一方，Helgason は落合先生から「対称空間は，微分幾何で取り扱われるリーマン多様体の基本的な例だし，リー環の基礎を勉強しておくことも役に立つかもしれないから」という言葉を信じて，勉強することにしたものである．しかし，リー群の基本的な事柄のうちはよかったが，読み進んでルート系や対称空間の分類に進むうちに苦痛になってきた．それは夏の大学院入試を過ぎて冬学期になった頃であったが，すでに Gilberg–Trudinger の面白さに目覚めたので，リー環論は線形代数の延長に過ぎず，非線形偏微分方程式の研究に役立つわけはない，と考えたからである*3)．落合セミナーの同級生の益岡竜介君や，途中から参加してくれた小林俊行君が，いっしょにやっていなければ，途中で放り投げていたに違いない．

2. 夏，大学院入試

今となっては隔世の感があるが，大学院重点化前の大学院入試は，結構難しかった．すでに書いたように Gilberg–Trudinger を勉強していたために，トポロジーを勉強する余裕がなかった．つまり学部 3 年の授業でやったことが，私のトポロジーの知識のすべてである．また，夏の入試の時点で，Klingenberg は多様体論の基本的な事柄を無限次元でやり直しただけである．つまり，多様体論の知識だって学部 3 年からそんなに増えていない．その上，Gilberg–Trudinger でやっていることが大学院入試に出題される可能性は 0% であった．というわけで，学部 3 年までの知識で大学院を受けるわけである．8 月の終わりに受けた東工大の入試では，リーマン幾何の問題が出て，不合格．面接にも進めなかった．それからかなり心配になってきて，東大の入試の準備に力を入れることにした．その頃，「研究者になるには入試の準備をしているようではだめだ，その先の専門の勉強をしなければいけない」ということがまことしやかに言われていたが，大学院に入れなければ研究者になれる道も閉ざされるわけだから，やむを得なかった．

大学院入試ではホモロジー群を計算する問題は出るが，基本群を求める問題はまず出題されないので，新しいことを勉強することはない．3 年でならったことを復習して，ひたすら過去の問題を解くだけである．微分幾何の問題は，想像がつかないので，自分ができる問題が出題されることを祈るのみだ．

幸いにして試験問題は解くことができた．面接では，最初は，Gilberg–Trudinger で学んだことを自信満々に説明して，うまく進んでいたのだが，トポロジーの知識をたずねる質問に入ったころから雲行きが怪しくなってきた．

質問：「リー群のオイラー数はいくつか知っていますか？」

答え：「知りません」

リー群の左不変ベクトル場の定義は知っているが，ベクトル場の零点の（符号付き）個数とオイラー数

*3) そののち，これも自ら否定することになる．非線形偏微分方程式の典型例であるインスタントン方程式のモジュライ空間である箙多様体の研究が，リー環論につながったのである．皮肉なことに今の研究では Gilberg–Trudinger は使わないが，Helgason で学んだルート系は，日常的に使う言葉になっている．

が等しいというポアンカレ・ホップの定理は，どこかで見たことがある，というぐらいだったので，歯が立たなかった．

質問：「基本群が有限群の空間の例は知っていますか？」

答え：「自明な例，一点以外は知りません」

実射影空間が親しみのわく空間になっていなかった．

トポロジーの知識が少なくても，まあいいだろう，ということになったのだろうか，幸いにして合格になった．

この面接には後日談があって，基本群に関する質問とそれに対する答えを，他の受験生に話したところ，やがて噂として広がったらしいのだが，10年以上経って，私のところに戻ってきたときは，なぜか次のようになっていた．

質問：「多様体の例は知っていますか？」

答え：「一点を知っています」

質問：「もう少し自明でない例はありませんか？」

答え：「二点です.」

この話は，のちに‘点’のヒルベルト概型を研究することにつながっているのだ，というオチになる．うまい，座布団一枚，と言いたいところだが，事実ではないので，ここで訂正をしておく．

3. 学部4年冬〜大学院

何とか無事に大学院に合格したあと，12月になると，Klingenbergは途中までしか進んでいなかったが，もういいだろうとなって，セミナーは3つに分裂し，私はJostの“Harmonic maps between surfaces”というシュプリンガーのレクチャーノートを読むことになった．これは，難解な本であったが，その頃はGilberg–Trudingerもかなり読み進んでいて，解析の知識がだいぶ身についていたから何とか読み進むことができた．Harmonic mapは，微分幾何に現れる非線形偏微分方程式の中でも一番の基本ともいえるもので，測地線の定義域を区間から，一般のリーマン多様体に拡張したものになっている．また，多くの応用があることも知られており，その少し前に，Siu–YauによるFrenkel予想の証明や，Siuによる局所エルミート対称空間の超剛性定理など，華々しい応用が見つけられており，活発に研究されていた．落合先生がHarmonic mapを勉強させたのも，そのような時代背景があったのだと思う．それからしばらく大学院の間は，harmonic mapや，その親戚（叔父くらいか？）ともいえる極小曲面，とくに幾何学的測度論について勉強した．内容については説明しないが，記録のためにセミナーで読んだ本・論文のリストを上げておく．

R. Schoen: Analytic aspects of the harmonic map problem.

E. Giusti: Minimal surfaces and functions of bounded variation.

L. Simon: Lectures on geometric measure theory.

R. Hardt and L. Simon: Boundary regularity and embedded solutions for he oriented Plateau problem.

結局，harmonic mapや極小曲面を研究テーマに選ぶことはなかった（投稿しなかった，修士論文の3本目はharmonic mapのregularityの考察であるが）．以下に述べるように，実際にはこの時期に勉強したことが，違った形で役に立っているのではあるが，例えば幾何学的測度論は，よく勉強しただけに，研究が何もできなかったのが少し残念である．今振り返ってみると，考えるべき面白い問題を発見することができなかった，というか，もっと安直に問題を見つけてしまったのが，その理由である．これを次に振り返る．

4. ゲージ理論との出会い——研究を始める

すでにDonaldsonのゲージ理論の結果の衝撃については，少し述べておいたが，私がこれを初めて知ったのは，修士1年のときの松本幸夫先生の講義だった．それから興味をもって，Lawsonの“The theory of gauge fields in four dimensions”という，Donaldsonの論文を紹介する本を読んだ．今，調べてみるとこの本の出版は1985年だから，

出版ホヤホヤだ．授業のレポートは，講義に関することならば何でもいい，ということだったので，Lawson の本に書いてあった，Uhlenbeck のコンパクト性定理の高次元化を考えて，それを書いて提出した．これは，上で紹介した Schoen の harmonic map の論文にあったコンパクト性定理の証明を，そのまま Yang–Mills 接続の場合に書き直してみた，というものである．harmonic map のときに使われた道具（例えば monotonicity formula と呼ばれている不等式）は，Yang–Mills 接続にもすべて揃っており，あとは接続に特有の，gauge 固定をする議論は，4 次元でも高次元でも同じだから，Uhlenbeck の議論をそのまま使えばよい．というわけで，Schoen の論文を読んでいた私にとっては，このようなことができるのは当り前で，何も考える必要もなく，ただ書き下すだけであった．授業のレポートだから，まあそのようなもので構わないであろう，と思って提出したのであるが，松本先生から落合先生に伝わって，「論文にまとめなさい」ということになった．そして，これが修士論文のうちの 1 本になった．その当時も「これで修士論文でいいのだろうか，安易だな」と思い，今でもそう思うが，そんなものも新しい結果になる牧歌的な時代であった．

と，そんなわけで，深い考えもなくゲージ理論を研究テーマに選ぶことになった．調和写像の特異点解消定理に関する論文を読んで，そのテクニックを単にゲージ理論の場合に適用しただけの論文が，修士論文の 2 本目である．

そんな修士論文だったのだが，なぜか東大の助手に採用していただけた．自分でも，自分の実力不足はよく分かっていたから，うれしい，というよりも，頑張らなくてはいけないというプレッシャーのほうが大きかった．

5. Einstein 計量の収束定理 ——深谷さんのおかげの結果

深谷賢治さんとの出会いは，学部 3 年の幾何の演習にさかのぼる．当時，深谷さんは助手になったばかりだった．童顔である，というのと字が汚い（TEX がない時代であるから，演習のプリントは手書きである）というのが，深谷さんの第一印象だった．しかし，本当の意味で出会ったのは，幾何コロキウムやその他の機会に，何回も講演を聞かせていただいてからであるといったほうがいいだろう．その頃，深谷さんは Riemann 多様体の収束，特に崩壊現象を研究されていて，いわゆる Gromov–Hausdoff 距離に関する基本的な結果から始めて，ご自身の研究をセミナーで何回か紹介してくださった．この研究は，当時の最先端を行くもので，世界的にも高く評価されていた．自分の研究テーマと重なりが多いとはいえないが，やはり最先端の研究の話を聞く，というのは貴重な経験であった．私のように，単に誰かがやったことをよく知っていたから，他の場合に応用したという結果ではない，正真正銘，深谷さんの頭の中で作られた本物の研究結果である．自分でもそのような結果を得たい，とあこがれたが，ではどのように研究したらそのような結果が得られるのか皆目見当もつかなかった．

今から振り返ってみると，4 年からのセミナーで，多様体上の解析は身についたものの，それまで自分で勉強したことがなかったから，数学の幅広い知識が欠けていたと思う．これでは，やはり本物の研究は難しい．それでも何かしらの研究結果を出さなければ，助手に採用してくださった先生方に申し訳ない，という気持ちでいっぱいだった．しかし，結局のところ，当時の私にできることは，harmonic map で学んだことを他の幾何に現れる偏微分方程式の解の場合に応用することだけだった．

幸いなことに，結果が，天から，正確には深谷さんから降ってきた．助手になって 1 年目の夏くらいだったと思う．上で紹介した深谷さんの研究結果は，Riemann 多様体の断面曲率を上下から定数で押さえた族の極限に関するものである．あるときセミナーで，「断面曲率よりも，より弱い不変量としてリッチ曲率があるが，リッチ曲率を下から押さえた族に関する収束については，あまり何も分かっていない」と前置きした上で，数少ない知られて



板東さんと筆者（右），議論中．

いる興味深い例として，小林亮一さんとTodorovの共同研究による，K3曲面上のRicci-flat計量の退化について，セミナーで紹介された．

この結果を聞いた瞬間，この例を一般化して4次元多様体上のEinstein計量のコンパクト性定理が成り立つであろう，と予想がたった．証明も，Yang–Mills接続に関するUhlenbeckのコンパクト性定理の証明を使えばいいだけで，あとはgauge固定に関する議論をGromov–Hausdorff収束に関する基本的な事柄におきかえればいいだけである．そちらのほうは，深谷さんの講演で聞いていたので，問題なかった．harmonic mapの柳の下に，Yang–Mills接続とEinstein計量のどじょうが2匹，というわけだ．この結果は，証明がYang–Mills接続のときと同じなのに意外だったようで，いろいろなところで講演したが，概ね好評だった．

もっとも，証明は，半分までしか自分一人でできず[*4]，完成段階は板東重稔さん，加須栄篤さんと共同研究ということになった．Yang–Mills接続の列を取ったときに，曲率の集中が起きると，極限の接続は，チャーン類が異なるベクトル束の上の接続と考えなければいけないことが，Uhlenbeckのコンパクト性定理の面白いところの一つである．いわゆるバブルだ．Einstein計量の列を考えるときは，多様体自身に同じことが起き，極限に現れるEinstein計量は，最初に与えられた多様体とは C^∞ 多様体として違うこと，また一般には極限は有限群による商特異点を持つオービフォールドになる．また，バブルとして弾け出るのは，いわゆるALE空間とよばれる非コンパクトなRicci平坦多様体になる．これは，小林–Todorovの例を知っていれば，すぐに予想ができるが，私一人ではオービフォールドになることの証明を与えることができなかった．この部分を教えてもらってできたのが，3人の共著の「ばかな[*5]」論文である．私の寄与は，問題を提出しただけであったが，お二人が研究を進めていく様子を一番近くで体験できたことは，得がたい体験であった．上で何回も述べたように，それまでの研究成果は，極めて安易に得られていて，問題が設定されると同時に解決するような問題だった．しかし，それだけですぐに得られる研究成果はすぐに尽きてしまう．ある結果を予想することができたあと，それを目標に理解が次第に広がって研究がだんだんと進み，証明ができていく，という経験（正確には，それを身近で見る体験）をしたのは初めてのことだった．本当の研究のやり方を，私はタイプ打ち（最初は，久保ワープロで入力し，途中からTEXに変更）をしながら学んだのだ．共著論文を書いたことも，もちろんうれしかったが，研究の仕方を学んだことは，そのあとずっと役に立った．助手の一年目は，こうして有意義に終わっていった．

6. 視野を広げる

Einstein計量の論文を書きながらも，一方でゲージ理論の論文を読みあさった．とはいっても，学生時代からトポロジーはあまり好きではなかったから，トポロジーへの応用を目的とするのではなく，偏微分方程式の研究が大きな役割を果たすものを中心に読んだ．それが自分が得意であったこともあるが，トポロジーへの応用はたくさんの人たちが研究しており，その中に入っていって新しいことができる自信があまりなかったこともある．流行にはなっているが，その最先端ではなく，他

*4)　この段階で，いろいろとAndersonに説明をしたために，結局未完成の論文を一つ，共著論文を一つと分けざるを得なくなった．

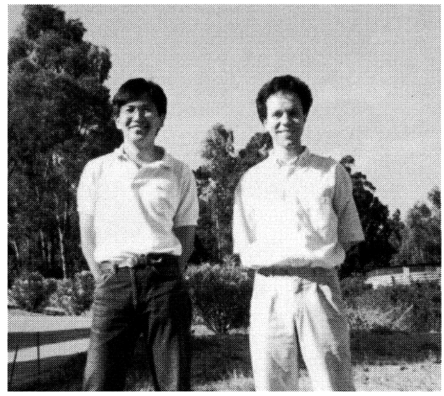
*5)　3人の名前の最初の文字を日本語で一つずつとる，板東さんのジョーク．

の人が見逃しているが，面白そうなことを見付けよう，ということを，この頃は考えていた．

勉強したことの中で，特に，感銘したのが，Hitchin・小林予想である．これは，ケーラー多様体上の正則ベクトル束がアインシュタイン・エルミート計量を持つための必要十分条件が，代数幾何学的な概念であるところの安定性と同値である，というものである．それまで非線形偏微分方程式については，いろいろと勉強して基本的なことは分かっているつもりでいたが，方程式が解を持つための必要十分条件が，代数幾何的な条件になる，などとは全く想像がつかなかったことだった．また，これはゲージ理論を（4次元多様体が代数曲面になるときに限られるが）微分幾何的な手法の代わりに，代数幾何的に調べることを可能にする．逆もまた然りである．

勉強していた当時は，Donaldson の代数曲面の場合の解決の論文と小林昭七先生の教科書があっただけで，まだ Uhlenbeck–Yau により解決したという情報が来る前のことだったので，自分なりに特別な場合だけでも証明ができないか，と考えてみたりもした．また，この問題にかなり近いと考えられる，アインシュタイン・ケーラー計量の存在の問題を，「ばかな」論文を使って曲面の場合に考えてみたりした．しかしやはり代数幾何を何も知らないで，安定性という概念がどこから来ているのかを理解もせずにこの問題を考えるのは無謀と感じたし，後者の問題も Tian に解かれてしまった．彼の論文を読むと，多変数複素解析がいろいろと使われていて，そこも知識不足を痛感させられた*6)．

それから，正則ベクトル束のことを勉強し始めた．まずは，Gieseker と丸山の安定ベクトル束のモジュライ空間の構成の論文である．これは，それまで Hartshorne すら紐解いたことのなかった私に，全く歯がたたなかったのはいうまでもない．それから，たぶん超ケーラー多様体に興味があった関係で目についたのだろうが，K3 曲面上の安定ベクトル束のモジュライ空間が，2次元ならば，K3 曲面になる，という向井茂さんの有名な論文を読んだ．これは，その当時の私にも何とか読め，こんなに美しい数学があるのか，と感動した．



共同研究中の Kronheimer と筆者（左）．

たぶん非線形偏微分方程式の研究にも，そろそろ限界を感じていたのであろうが，向井さんの結果と似たようなことが自分にもできないか，と思って調べてみたのが次の研究である．Einstein 計量の収束の際のバブルとして，ALE 空間が弾け出すと前に述べたが，ALE 空間は K3 曲面の非コンパクトな類似物であると考えるのが自然であると見えてくる．そこで，その上のインスタントンのモジュライ空間が4次元（=複素2次元）になるときに，再び ALE 空間になるのではないか，と考えた．ちょうどその当時は，非コンパクトな多様体上のインスタントンのモジュライ空間の研究が盛んに行われており，特に当時助手の古田さんがその専門家であり，また同級生の橋本義武くんと関係する仕事をされていたので，そうなるだろうと予想がつけば，証明するのは適当な文献を勉強したらそんなに難しいことではなかった．

7. Kronheimer との共著論文

上の ALE 空間上のインスタントンの研究は，他人の借り物ではない初めて自分の研究であったという意味で，個人的には思い入れ深いものである．博士論文でもある．しかし，学問的な価値は，そのすぐあとの Kronheimer との共著論文で，より一

*6) その後もアインシュタイン・ケーラー計量の存在の問題は，現在まで活発に研究が続けられている．

般的な理論からの簡単な帰結になって，なくなってしまった．

Kronheimer は Oxford 出身で，日本流ならの私の一学年下，イギリス流なら同学年である．Atiyah の下で取った学位論文は，ALE 空間を超ケーラー商として構成したもので，箙の表現を幾何に持ち込んだ，初めての結果であるといえるだろう．「ばかな」論文を通じて，ALE 空間の重要性を感じていたから，Kronheimer の論文はよく読んでいた．というか，正確には落合先生に推薦して，セミナーの後輩の牛腸徹くん，後藤竜司くんに読んでもらっていた．

89 年の夏に，数週間アメリカに滞在したのだが，その真ん中にバークレーにいたときに MSRI を訪れていた Kronheimer と（偶然に）出会った．彼は（当時まだプレプリントだった）私の論文を知っていて，ALE 空間自身だけでなく，ALE 空間上のインスタントンのモジュライ空間も，やはり箙の表現を使って表されるはずだ，そしてそれは $\mathbf{R}^4$ のインスタントンを記述した有名な，Atiyah–Drinfeld–Hitchin–Manin の論文（ADHM と通常略す）の modification になっている，といいだした．ADHM は知っていたが，証明は $\mathbf{R}^4$ の一点コンパクト化の S^4 のツイスター空間が，複素 3 次元射影空間という，極めて取り扱いやすいものになっていることに依存しているので，一般化できないと思っていた．しかし，その点についても Kronheimer はアイデアを持っていて，Donaldson による証明を真似すればいいといって，次の年に出版される Donaldson–Kronheimer の原稿のコピーをくれた．確かに彼がいうとおりで，バークレーにいた 2 週間で証明はほぼ完成した．

結果が予想できたら，すぐに解決したという点，また，他人の証明をなぞれば証明できたという点は，最初の頃の論文に近いといえる．しかし，Donaldson の証明や，そのもとになった Corrigan–Goddard という物理学者たちの証明は，今まで自分が学んできた数学とは違ったので，それを勉強しながら証明を書き下すこと自体が，新しい知識の吸収だった．例えばスペクトル系列を勉強したのも，これが初めてのことだった．以前のような先細りの感は全くなく，むしろ逆に自分の数学的な知識が広がっていくのを感じることができた．偏微分方程式だけにこだわるのではなく，広く数学を学ぶことの重要性を，助手 3 年目のこのときになってやっと認識した．

だが，正しい方向に知識を広げることができたのは，Kronheimer（もしくは Donaldson）の博識があればこそであって，自分自身でその道を発見するのは試行錯誤の連続で簡単なことではない．この研究の後，どの方向に進めばいいのか分からず，それを調べる方法にも思い当たらず，私の研究は停滞することになる．最初に述べたように，この間のことは，すでに別のところに書いたので，繰り返さない．苦しい数年間の後，見えてきたのは，想像もしていなかった分野とのつながりであり，これまで全く知らなかった数学の世界だった．そして，学部・大学院から助手まで所属していた東大から，全く見知らない土地，仙台にある東北大に異動し，議論する数学者も新しい人たちになった．微分幾何学者を卒業し，新しい道を歩みはじめたのである．

参考文献

1)『日本の現代数学—新しい展開をめざして』，数学書房，2010 年．

（なかじま・ひらく，京都大学数理解析研究所）

特　集（2011 年 1 月号予告）

数論の探求

ゼータからその世界に迫る

本体 952 円

特　集（2010 年 11 月号）

連続から離散へ

なぜ離散的な考え方か

本体 952 円

編集後記

毎年，この編集後記を作成する頃に，ノーベル賞の発表があり，今年も移動中に誰が受賞したかをチェックしていました．自然科学の分野では今年は化学賞で日本人の先生が二人も同時に受賞されました．大変喜ばしいことだと思います．受賞した内容を調べてみると，小誌で主に扱っていることからは少し離れてしまいますが，とても興味深いものでした．私たちの生活でも非常に役に立っているようです．

また，報道番組を見ていましたら，この受賞に関して「人は財産ですね」といった趣旨のコメントがありました．資源が少ない日本ではまさにそうだなと思います．これを機に日本における自然科学，基礎科学の学問的需要もより盛り上がってほしいところです．

小誌は一足先に年末を迎えます．今年は数学の関連では 4 年に一度の国際数学者会議もありました．科学の世界は内容が濃かったような気がします．来年も濃密な出来事がたくさん起こることを期待しております．　　(R)

数　理　科　学　12月号

2010 年 12 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ⓒ 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁